Gk1 i Matematik, hemtal v43-44/07 Metsalo

To 25.10. - on 31.10. är det tentamensperiod, så då meddelas ingen undervisning i kursen.
På insidan av detta blad finns en tillämpning av 2:a ordningens linjära homogena differentialekvationer, som behandlas i kap. 3.7. Studera hur den fysikaliska situationen leder till en differentialekvation och hur vi får lösningen till den mha. en lämplig ansats.

On: 1a) 1.2.12 b) 1.2.25 c) 1.2.33 d) 1.2.41
e) 1.3.3 f) 1.3.6 g) 1.3.24/25/24
h) 1.3.29/29/31 (uppl. 6/5/4 av Adams).

2) Visa att $f(x)=x^3-2x-5$ har (minst) ett nollställe i det öppna intervallet $]2,3[$ samt bestäm detta nollställe med ett fel < 0.01 mha. intervallhalveringsmetoden. (Vi söker alltså ett tal a sådant att $f(a)=0$, men nöjer oss med ett tal $b \ni |b-a|<0.01$. Däremot räcker det inte om vi finner ett tal $c \ni |f(c)|<0.01$, för då vet vi inte om c approximerar nollstället a med ett fel <0.01.) Förklara också hur vi kan veta att felet är <0.01.

3) 1.5.37 Ur detta följer att om f och g är dif. och kontinuerliga i $\mathbb{R}$, så är även $f\circ g$ (def. och) kont.

4) 1.5.38 (den s.k. klämsatsen)

Demo: Vi visar satsen i 1.5.33 mha. hjälpsatsen i 1.5.32 samt satsen i 1.5.36 mha. hjälpsatserna i 1.5.34 och 1.5.35. Ur dessa satser får vi att produkten av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig samt att kvoten av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig, där den är definierad.

Nästa fredags hemtal på baksidan.

Fr: 1a) Kurvan $y = f(x) = x^4/12 - x^3/3 - 4x^2 + 9x - 4$ går genom punkterna $(0, -4)$ och $(2, -10/3)$. Bestäm tangentlinjerna till kurvan i dessa punkter samt dessa två tangentlinjers skärningspunkt P.

b) Kurvan har ytterligare två tangentlinjer, som går genom punkten P. Bestäm lutningarna hos dessa två linjer.

2) $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \cdot \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

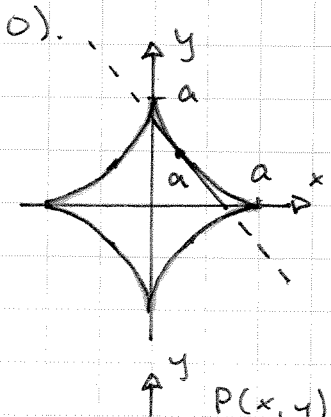
f är bekant från datorövningen. Visa (t.ex. mha. klämsatsen från förra övningen) att f är kont. och differentierbar i hela $\mathbb{R}$ (även i $x = 0$), men att derivatan f' är diskontinuerlig. Märk att trots att $f'(0) > 0$, så finns det inget intervall innehållande origo, där f är växande.

3a) Antag att f & g är tillr. många gånger deriverbara. Låt $h_1(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Då är $h_1'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. Bestäm $h_1''(x)$ och $h_1'''(x)$.

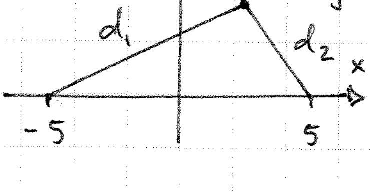
b) Låt $h_2(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Då är $h_2'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Bestäm $h_2''(x)$ och $h_2'''(x)$.

c) Antag att f är 3 gånger kontinuerligt deriverbar i en omgivning av origo och att $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 8$ och $f'''(0) = 17$. Låt $h_3(x) = (\frac{1}{f})(x) = 1/f(x)$. Då är $h_3(0) = 1$. Beräkna $h_3'(0)$, $h_3''(0)$ och $h_3'''(0)$.

4) "Den fallande stegens kurva".
Asteroiden $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ är bekant från datorövningen. Visa att den delen av tangentlinjen till asteroiden, som begränsas av koordinataxlarna, har längden a.

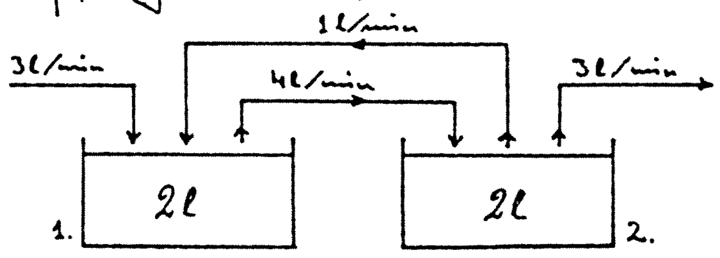


Demo: Vi studerar kurvan $d_1 \cdot d_2 = 30$ (se figuren till höger) från datorövningen och bestämmer mha. implicit derivering punkterna på kurvan, där den har horisontell respektive vertikal tangent.



Torsdagen 8.11. har vi 2:a datorövningen. Då kommer vi att använda programpaketet Mathematica.

Tillämpning av differential-ekvationer.



Vi har 2 bägare, vilka vardera innehåller 2l vatten. Vi pumpar in rent vatten i bägare 1, 3l/min. Från bägare 1 pumpar vi 4l/min till bägare 2 och från bägare 2 1l/min till bägare 1. Slutligen pumpar vi 3l/min från bägare 2 ut i slasken.
I början innehåller bägare 2 rent vatten, men i bägare 1 har vi löst 20 g salt. När kommer bägare 2 att innehålla maximal mängd salt och hur mycket salt kommer det då att finnas där?

Klart är, att efter lång tid har all salt spolats ut ur systemet. Låt oss studera, vad som händer under ett kort tidsintervall Δt min. Låt $S_1(t)$ och $S_2(t)$ beteckna saltmängden (i gram) i bägare 1 resp. 2 vid tiden t (i min).

Bägare 1: salt in: $1\,l/\text{min} \cdot S_2(t)\,g/2l \cdot \Delta t$ min
salt ut: $4\,l/\text{min} \cdot S_1(t)\,g/2l \cdot \Delta t$ min
(dessa är bara approximationer, för saltmängderna $S_1(t)$ och $S_2(t)$ kommer ändra sig (lite) under (det korta) tidsintervallet Δt.)
Ändringen $\Delta S_1 \approx \frac{1}{2}\cdot S_2(t)\cdot\Delta t - 2\cdot S_1(t)\cdot \Delta t$ (gram)
$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S_1}{\Delta t} = S_1'(t) = -2S_1(t) + \frac{1}{2}\cdot S_2(t)$

Bägare 2: salt in: $4\,l/\text{min} \cdot S_1(t)\,g/2l \cdot \Delta t$ min
salt ut: $4\,l/\text{min} \cdot S_2(t)\,g/2l \cdot \Delta t$ min
(dessa är också bara approximationer, men ju mindre Δt är, desto bättre är approximationerna.)
Ändringen $\Delta S_2 \approx 2S_1(t)\cdot\Delta t - 2S_2(t)\cdot\Delta t$ (gram)
$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S_2}{\Delta t} = S_2'(t) = 2S_1(t) - 2S_2(t)$

Vi har nu ett system av 2 diff. ekvationer av 1:a ordn:

$$\begin{cases} S_1'(t) = -2S_1(t) + \frac{1}{2}\cdot S_2(t) & \text{I} \\ S_2'(t) = 2S_1(t) - 2S_2(t) & \text{II} \end{cases}$$

$S_2(t) = 2S_1'(t) + 4S_1(t)$ enl. I. Derivera I:

$$S_1''(t) = -2S_1'(t) + \frac{1}{2}\cdot S_2'(t) = \{\text{II}\} = -2S_1'(t) + (S_1(t) - S_2(t)) =$$
$$= -2S_1'(t) + S_1(t) - 2S_1'(t) - 4S_1(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_1''(t) + 4S_1'(t) + 3S_1(t) = 0$$

Vi har en linjär, homogen diff. ekv av 2:a ordningen med konstanta koefficienter. Ansätt $S_1(t) = e^{rt}$:

$$S_1''(t) + 4S_1'(t) + 3S_1(t) = r^2e^{rt} + 4re^{rt} + 3e^{rt} = (r^2 + 4r + 3)e^{rt} = 0$$
$$\Rightarrow (r^2 + 4r + 3) = (r+1)(r+3) = 0 \Rightarrow r_1 = -1,\ r_2 = -3. \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_1(t) = A\cdot e^{-t} + B\cdot e^{-3t} \Rightarrow S_1'(t) = -Ae^{-t} - 3Be^{-3t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_2(t) = 2S_1'(t) + 4S_1(t) = 2Ae^{-t} - 2Be^{-3t}$$

$$\left.\begin{matrix} S_1'(t) = -2S_1(t) + \frac{1}{2}\cdot S_2(t) \\ S_2'(t) = 2S_1(t) - 2S_2(t) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} S_1(t) = Ae^{-t} + Be^{-3t} \\ S_2(t) = 2Ae^{-t} - 2Be^{-3t} \end{cases}$$

Nu kan vi sätta in begynnelsevillkoren: $S_1(0) = 20$ och $S_2(0) = 0$ (gram) ger oss A och B.

$$\left.\begin{matrix} A + B = 20 \\ 2A - 2B = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} A = 10 \\ B = 10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} S_1(t) = 10(e^{-t} + e^{-3t}) \\ S_2(t) = 20(e^{-t} - e^{-3t}) \end{cases}$$

(saltmängderna mäts i gram, tiden i minuter.)

När antar $S_2(t)$ sitt maximum? $S_2(0) = \lim_{t\to\infty} S_2(t) = 0$, så max antas då $t = T \in\ ]0, \infty[$.

$$S_2'(t) = 20(-e^{-t} + 3e^{-3t}),\ 0 = S_2'(T) = 20(-e^{-T} + 3e^{-3T}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3e^{-3T} = e^{-T} \Rightarrow 3 = e^{2T} \Rightarrow T = \frac{1}{2}\cdot \ln 3 \quad \text{(minuter).}$$
$$S_2(T) = 20(e^{-T} - e^{-3T}) = 20(3^{-1/2} - 3^{-3/2}) = 20\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \text{(gram)}$$

Så bägare 2 kommer att innehålla maximal mängd salt efter $\underline{T = \frac{1}{2}\cdot \ln 3 \text{ minuter}}$ ($\approx$ 33 sekunder), då den innehåller $\underline{S_2(T) = 40/3\sqrt{3}\ g}$ ($\approx$ 7.7 g).

Ur problemet bildade vi ett system av 2 diff. ekv. av 1:a ordn. Dessa löste vi 'tuha' en diff. ekv. av 2:a ordn. Därefter fick vi $S_1(t)$ och $S_2(t)$ ur begynnelsevillkoren. Nu vet vi alltså saltmängderna för alla $t \geq 0$.