Gk1 i Matematik, hemtal v42/07 Metsalo

Onsdagens räkneövning används åt nedanstående demo, som ges en ny binär operation i $\mathbb{R}^3$ vid sidan av additionen och vektorprodukten och förklarar sanningen i Garfields påstående på baksidan av hemtalslappen v41.

On: Demo: Denna uppgift använder det mesta vi lärt oss hittills! Om man vrider en boll kring en axel genom mittpunkten, ändras inte mittpunktens position. Nu visar vi att även motsatsen gäller: Om man vrider en boll godtyckligt, så att mittpunktens position förblir oförändrad, är slutresultatet detsamma som om vridningen skett kring någon axel genom mittpunkten.

Enhetsvektorerna $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ bildar ett ortonormalt högersystem: ortogonalt: $\hat{e}_1 \perp \hat{e}_2 \perp \hat{e}_3 \perp \hat{e}_1$, normerat: $\|\hat{e}_i\| = 1$, högersystem: $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = +\hat{e}_3$ ($\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = -\hat{e}_3$ för vänstersystem). Om vi vrider dessa tre basvektorer (och därmed hela $\mathbb{R}^3$) kring någon axel genom origo, får vi tre nya vektorer $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$, som också bildar ett ortonormalt högersystem.

Nu gör vi tvärtom: Vi börjar med ett ortonormalt högersystem $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$ och visar att detta alltid kan fås genom att vrida standardbasen $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ kring någon lämplig axel genom origo i $\mathbb{R}^3$

a) Att manipulera standardbasen $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ till den nya basen $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$ är en linjär operation i $\mathbb{R}^3$, som ges av matrismultiplikation med en 3×3-matris V, vars kolumnvektorer är $\hat{v}_i$: Om $\hat{u} = \alpha\hat{e}_1 + \beta\hat{e}_2 + \gamma\hat{e}_3$ före manipulationen är den $\alpha\hat{v}_1 + \beta\hat{v}_2 + \gamma\hat{v}_3$ efter manipulationen.

b) V har egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, där $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1$.

c) Om λ är ett egenvärde till V, så är även komplexkonjugatet $\bar{\lambda}$ och inversen $1/\lambda$ egenvärden till V.

d) Ett av V:s egenvärden måste vara 1, så en hel linje genom origo förblir oförändrad, då vi manipulerar standardbasen till den nya basen. Manipulationen är ekvivalent med att vrida $\mathbb{R}^3$ kring denna axel.

På insidan finns en liten sammanfattning av den närmaste framtiden. På baksidan finns fredagens hemtal.

Fr. 1a) Låt $f(x)=2x-3$ och $g(x)=(x+3)/2$. Visa att $(f\circ g)(x) = (g\circ f)(x) = I(x) = x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Rita deras grafer. f och g sägs vara varandras inversfunktioner (mera i kap. 3.1).

b) Visa att $f:\mathbb{R}\setminus\{4\}\to\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x)=(2x+3)/(x-4)$ och $g:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{4\}$, $g(x)=(4x+3)/(x-2)$ är varandras inversfunktioner i bemärkelsen $f\circ g = I_{\mathbb{R}\setminus\{2\}}$, $g\circ f = I_{\mathbb{R}\setminus\{4\}}$. Rita deras grafer.

2) Vi studerar de tre funktionerna $I(x)=x$, $s(x)=\frac{1}{x}$ och $t(x)=1-x$ definierade i $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Definiera funktionerna $u=s\circ t\circ s$, $v=s\circ t$ samt $w=v\circ v$ och visa att de sex funktionerna $\{I,s,t,u,v,w\}$ (märk: alla def. i $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$) bildar en icke-komm. grupp under operationen sammansättning av funktioner. Komplettera sammansättningstabellen ovan.

$\circ$	I	s	t	u	v	w
I	I	s	t	u	v	w
s	s		v			
t	t					
u	u		w			
v	v	u				w
w	w					

3) Begreppen jämna och udda funktioner är bekanta från ön v41. I uppg. 1b) visades, att om f och g är bägge jämna, så är även $f+g$ jämn, medan om f och g är bägge udda, så är även $f+g$ udda, men om f är jämn och g udda, är $f+g$ i allmänhet varken jämn eller udda.
Om f och g är jämna, så är även $f\cdot g$ jämn, eftersom $(f\cdot g)(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = \{f, g \text{ jämna}\} = f(x)\cdot g(x) = (f\cdot g)(x)$.
Om f är jämn och g udda, så är $f\circ g$ jämn, eftersom $(f\circ g)(-x) = f(g(-x)) = \{g \text{ udda}\} = f(-g(x)) = \{f \text{ jämn}\} = f(g(x)) = (f\circ g)(x)$.
Om vi låter J stå för jämna funktioner och U för udda, kan vi bilda 3 tabeller för add., mult. och sammansättning av funktioner. 6 satser har vi redan visat.
Komplettera tabellerna till höger (visa alltså sex satser).

+	J	U
J	J	X
U	X	U

$\cdot$	J	U
J	J	
U		

$\circ$	J	U
J		J
U		

4) $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ är ett polynom med heltalskoefficienter, dvs. $a_k\in\mathbb{Z}$. Visa att om $\alpha = p/q$ är ett rationellt nollställe till f (dvs. $f(\alpha)=0$, $\alpha\in\mathbb{Q}$) och bråket p/q är förkortat, så måste p vara en faktor i a_0 och q en faktor i a_n. Gott råd: multiplicera VL & HL med q^n.

Demo: $f(x)=\begin{cases} 1/q, & \text{om } x\in\mathbb{Q},\ x=p/q \text{ förkortat} \\ 0, & \text{om } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

Vi studerar kontinuiteten hos funktionen f.

<u>Liten sammanfattning</u> av kursinnehållet under de närmaste veckorna, då vi börjar med Adams:

Kap. P torde vara främst repetition av gymnasiekunskaperna. Studera det <u>på egen hand</u>. I kap. P5 införs binära operationer för funktioner. Efter införandet av inversa funktioner i kap. 3.1 kan vi bilda stora <u>funktionsklasser</u>.

I kap. 1 införs <u>gränsvärdesbegreppet</u>, som är centralt inom kalkylen och via det <u>kontinuitetsbegreppet</u>.

I kap. 2 införs <u>derivatan</u> i form av ett gränsvärde. Vi får också deriveringsregler, som möjliggör derivering av de flesta funktionerna i våra funktionsklasser. Kap. 2.7 med några tillämpningar av derivatan, kap. 2.8 med högre ordningens derivator (och fakulteten) samt kap. 2.11 med tillämpningar av anti-derivatan studeras främst <u>på egen hand</u>. I upplaga 4, ex. 3, sid. 147 finns ett tryckfel: det står $\frac{d^2}{dt^2}y(t) = k^2y(t) = 0$, men det skall vara $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + k^2y(t) = 0$. Rätta till felet!

I kap. 3.1 beskrivs <u>invers-funktioner</u> mer ingående. I kap. 3.2-3 definieras <u>exponential- och logaritmfunktionerna</u> på två olika (men ekvivalenta) sätt:

I kap. 3.2 utgår vi från a^r, $r \in \mathbb{Q}$, definierar a^x som ett gränsvärde och definierar $g(x) = \log_a x$ som inversfunktionen till $f(x) = a^x$ (för $0 < a \neq 1$). I kap. 3.3 definierar vi den naturliga logaritmen ln m.h.a. areor, definierar dess inversfunktion exp och visar, att dessa är speciella logaritm- resp. exponentialfunktioner samt får deras egenskaper, i synnerhet definitions- och värdemängd, kontinuitet och derivatorna.

Därigenom har vi alla nödvändiga redskap för att konstruera <u>de elementära funktionerna</u>. Från och med kap. 3.4 drar vi slutsatser av det tidigare arbetet och där blir det i huvudsak fråga om <u>självstudier</u> med hemtalen och bokens övningsuppgifter som komplement.

I kap. 3.4 visas några <u>viktiga egenskaper</u> hos exponential- och logaritmfunktionerna, nämligen att exponentialfunktionerna växer snabbare och logaritm-funktionerna långsammare än potensfunktionerna.

I kap. 3.5-6 definieras <u>flera nya funktioner</u>: De cyklometriska funktionerna (arcus-fknerna) definieras som inversfunktioner till lämpliga begränsningar av de trigonometriska fknerna, de hyperboliska fknerna definieras mha exponential-fknen och area-fknerna definieras som inversfkner till (lämpliga begränsningar av) de hyperboliska fknerna.

<u>Studera definitionerna</u> av dessa nya funktioner. Definitionerna ger nämligen deras definitions- och värdemängder. Studera också deras <u>grafer</u> och observera, att definitionerna medför, att dessa fkner är kontinuerliga och ger oss också deras derivator.

I kap. 3.7 illustreras hur dessa nya funktioner dyker upp i <u>enkla fysikaliska sammanhang</u>. Naturen mer eller mindre tvingar på oss dessa funktioner!

Trots att de trigonometriska och de hyperboliska fknerna definieras på helt olika sätt, har de formler, som är nästan identiska (så när som på olika tecken ibland). I själva verket är de trigonometriska och de hyperboliska fknerna mycket nära besläktade, vilket också figurerna på sid. 196/214/211 indikerar, men för att detta släktskap skall framgå måste man gå över från reella tal $\mathbb{R}$ till komplexa tal $\mathbb{C}$. Mera om detta i Gk3.

Area-funktionerna kan ges explicit mha ln, såsom är gjort i kap. 3.6. Något motsvarande kan vi inte göra med de cyklometriska funktionerna (arcus-fknerna), åtminstone inte i $\mathbb{R}$.

Trots att de nödvändiga verktygen för kap. 3.4-7 ges i de tidigare avsnitten, krävs en hel del <u>arbete på egen hand</u> för att bli mera van vid alla dessa nya funktioner och deras egenskaper.