Gk1 i Matematik, hemtal v40/07 Metsalo

Ou: 1) I vilken punkt skär planet $\Pi_1: x+2y+3z=1$ skärningslinjen mellan planen $\Pi_2: 2x+3y+5z=1$ och $\Pi_3: 2x+4y+7z=3$?

2) Planet Π innehåller x-axeln och punkten $(1,2,3)$.

a) Bestäm den punkten P i planet Π, som är närmast punkten $(-6,8,-1)$.

b) Bestäm avståndet mellan punkten P och origo.

3) En kvadratisk matris med bara nollor under huvuddiagonalen (dvs. $a_{ij}=0$, om $i>j$) kallas för en <u>övre triangulär matris</u> och en kvadratisk matris med bara nollor över huvuddiagonalen (dvs. $a_{ij}=0$, om $i<j$) kallas för en <u>nedre triangulär matris</u>.

a) Visa att summan och produkten av två övre triangulära $n\times n$-matriser också är övre triangulära $n\times n$-matriser.

b) Visa att mängden av övre triangulära $n\times n$-matriser bildar en <u>ring med etta</u> under operationerna matrisaddition och matrismultiplikation.

<u>Anm:</u> Analoga resultat gäller även för nedre triangulära $n\times n$-matriser.

4) Låt A och B vara två matriser sådana att $A+B$ och AB bägge är definierade. Visa att om $A+B=AB$, så är $B+A=BA$.

Demo: Dagens demo används åt att besvara eventuella frågor om de nya begreppen i extrauppgifterna på insidan av supplementet.

Fr: 1) För vilka värden på konstanten k kommer det linjära ekvationssystemet att sakna lösning?

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

(Gott råd: Tänk på vad koefficientmatrisens determinant berättar om systemets lösningar.)

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \\ 1 & 4 & 16 & 7 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

a) Beräkna $\det(A) = |A|$

b) Beräkna $\mathrm{inv}(A) = A^{-1}$

c) Lös det linjära ekv.-systemet $A\bar{x} = \bar{b}$

3) En matris $A \ni A^2 = A$ kallas <u>idempotent</u>.

a) Visa att determinanten av en idempotent matris är 0 eller 1.

b) Visa att parallellprojektionsmatrisen $P = I - \frac{1}{\hat{n}^T \bar{s}} \cdot \bar{s}\hat{n}^T$ i manipulation 4 i supplementet är idempotent.

c) Visa att $\det(P) = 0$ för parallellproj.matrisen P.

4) En matris A kallas <u>ortogonal</u>, om A är inverterbar och $A^{-1} = A^T$. Visa att

a) A ortogonal $\Rightarrow \det(A) = |A| = \pm 1$

b) A, B $n \times n$, ortogonala $\Rightarrow$ AB $n \times n$, ortogonal

c) A ortogonal $\Rightarrow A^{-1}$ ortogonal

d) Mängden av ortogonala $n \times n$-matriser bildar en <u>grupp</u> under operationen matrismultiplikation.

Demo: Vi visar att vridmatrisen U i manipulation 5b) i supplementet (se baksidan) är ortogonal.