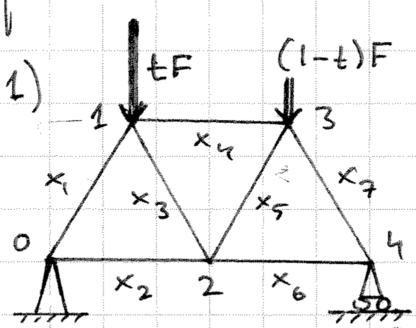
Gk1 i Matematik, datorövning 3, 29.11.2007 Metsalo

0) Läs igenom uppg. 0 från datorövn. 1 och handla därefter!

Under denna datorövning använder vi åter programpaketet Mathematica, så det kan vara värt att taga med uppgiftsbladet till datorövn. 2 (med den lilla sammanfattningen på insidan) samt Laukkanens kompendium.

1)

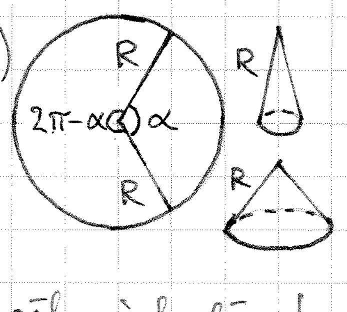


Vi studerar en generalisering av problemet med fackverket i Demo fr v38 och uppg. 5, datorövn. 1. Nu är totalkraften F uppdelad så att tF belastar nod 1 och (1−t)F belastar nod 3 (med $t \in [0,1]$; tidigare var $t = 0.7$). Sätt F = 1, så dragkrafterna x_i blir multiplar av F. Högerledet $\bar{b}$ i ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{b}$ blir nu beroende av parametern t. Efter att ha matat in koefficientmatrisen A och (den vektorvärda funktionen) $\bar{b}$ får vi vektorn $\bar{x}$ med de sökta dragkrafterna via kommandot

x = Simplify[Inverse[A]. b]. Sedan kan vi plotta dragkrafterna som funktioner av parametern t via kommandot Plot[Evaluate[x], {t, 0, 1}]

Avgör vilken kurva (= linje i detta fall) hör till vilket stag, vilket värde på t minimerar maximala dragkraften (då $x_i > 0$), vilket värde på t minimerar maximala tryckkraften (då $x_i < 0$), vilka stag har hög drag- eller tryckkraft då (så de kanske borde förstärkas) samt vilka stag har låg drag- eller tryckkraft då (så de eventuellt kan bytas mot svagare och kanske billigare stag).

2)



Detta problem är en fortsättning på uppg. 3, fr v46, då vi tillverkade en kon med maximal volym ur en cirkelskiva. Nu skär vi ut en sektor med vinkeln α ur en cirkelskiva med radien R och viker sedan två räta cirkulära koner. Bestäm vilket α ger max. sammanlagda volymen hos de två konerna. (Forts. på insidan.)

2) (forts.) Här kan Solve vara bra för att bestämma derivatans nollställen exakt, fast NSolve, som (bara) ger närmevärden, är nog mera praktisk. För att plotta totala volymen som en funktion av vinkeln α är det lämpligast att sätta $R = 1$ (varvid vi får volymen som en multipel av R^3). Vi kan även försöka approximera derivatans nollställen "själva" mha. intervallhalvering eller Newtons metod.

3) Plotta $f(x) = \sqrt{\exp(x) + \sin x}$ och dess Maclaurinpolynom av grad 3 från förra fredagens övning i en omgivning av $x = 0$ för att se, hur väl Maclaurinpolynomet approximerar den ursprungliga funktionen. Om det gamla x:et från uppg. 1 stör, så gör Remove[x]

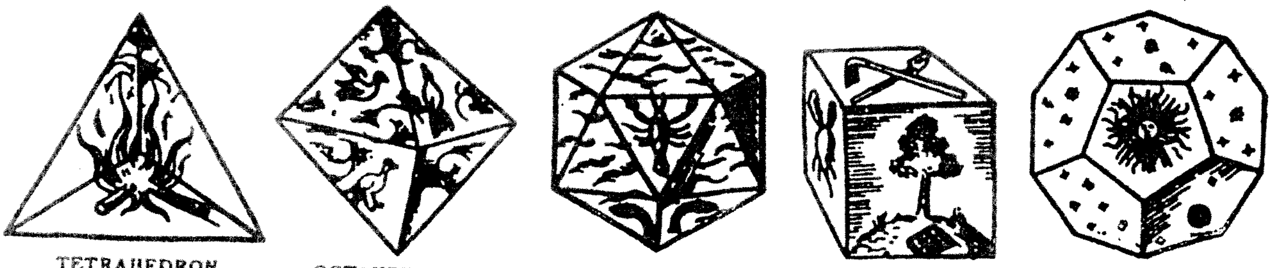
4) arctan x är definierad i hela $\mathbb{R}$ och dess Maclaurinpolynom av grad $2n$ är $P_{2n}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ (arctan är en udda funktion, så dess Maclaurinpolynom kan bara udda potenser av variabeln). I intervallet $[-1, 1]$ approximeras funktionen tämligen väl av polynomet (allt bättre approximationer ju högre gradtal vi tar).
Rita arctan x och $P_{2n}(x)$ för några olika gradtal i samma figur, som täcker ett större intervall än $[-1, 1]$, t.ex. $[-1.5, 1.5]$ för att se sambandet mellan funktionen och Taylor- (i detta fall Maclaurin-)polynomet och varför det blir problem utanför intervallet $[-1, 1]$, då gradtalet växer. På våren studerar vi serier och och undersöker fenomenet mer ingående.

5) I uppg. 4 i mellanförhör 2 förra tisdagen studerade vi kurvan $\ln x + e^y + \sin(ky) = 1$, som i en omgivning av punkten $(1, 0)$ är grafen $y = f(x)$ av en funktion f, som vi bara får implicit ur ekvationen och som satisfierar $f(1) = 0$.
Mha. implicit derivering beräknade vi (förhoppningsvis) $f'(1)$ och $f''(1)$. Mha. dessa kan vi bilda f:s Taylorpolynom av grad 2, utvecklad i $x = 1$:
$$f(x) \approx P_2(x) = f(1) + f'(1) \cdot (x-1) + \frac{1}{2!} f''(1) \cdot (x-1)^2.$$
(Forts. på nästa sida)

5) (forts.) Nu låter vi Mathematica bilda 5:e gradens Taylorpolynom av f(x), utvecklad i punkten x = 1: Gör först Remove[x, y, g], så att inte eventuella gamla definitioner stör de nya. Definiera sedan g[x_, y_] := Log[x] + Exp[y] + Sin[x*y] och insatt = x -> 1 samt y[1] = 0 Sedan bildar vi en tabell över våra krav via kommandona
krav1 = Table[D[g[x, y[x]] == 1, {x, k}], {k, 1, 5}] och
krav2 = krav1 /. insatt De sökta derivatorna fås via
deriv = Table[D[y[x], {x, k}], {k, 1, 5}] /. insatt
och de sökta derivatornas värden fås sedan via
derivvarden = First[Solve[krav2, deriv]]
Då borde vi känna igen y'[1] och y''[1] från mellanförhöret. Taylorpolynomet fås nu via
poly = Sum[(D[y[x], {x, k}] /. insatt /. derivvarden)/
k! * (x - (x /. insatt))^k, {k, 0, 5}]
Rita därefter kurvan g = 1 m.h.a. kommandot
bild1 = ContourPlot[g[x, y] == 1, {x, 0, 4}, {y, -2, 2}]
bild2 = Plot[poly, {x, 0, 4}] ritar Taylorpolynomet och Show[bild1, bild2] sammanför figurerna. Studera gärna kurvan g = 1 i ett större område också, t.ex. via {x, 0, 8}, {y, -4, 4} i ContourPlot

6) Låt Mathematica beräkna några av gårdagens integraler och kontrollera gärna svaren till morgondagens hemtal. Glöm dock inte, att vi vill ha lösningarna, inte bara svaren. Om några uppgifter från de tidigare datorövningarna är ogjorda, kan dessa också göras.

Lämna Mathematica m.h.a. Exit, stäng Mathematica-fönstret och glöm inte att logga ut.



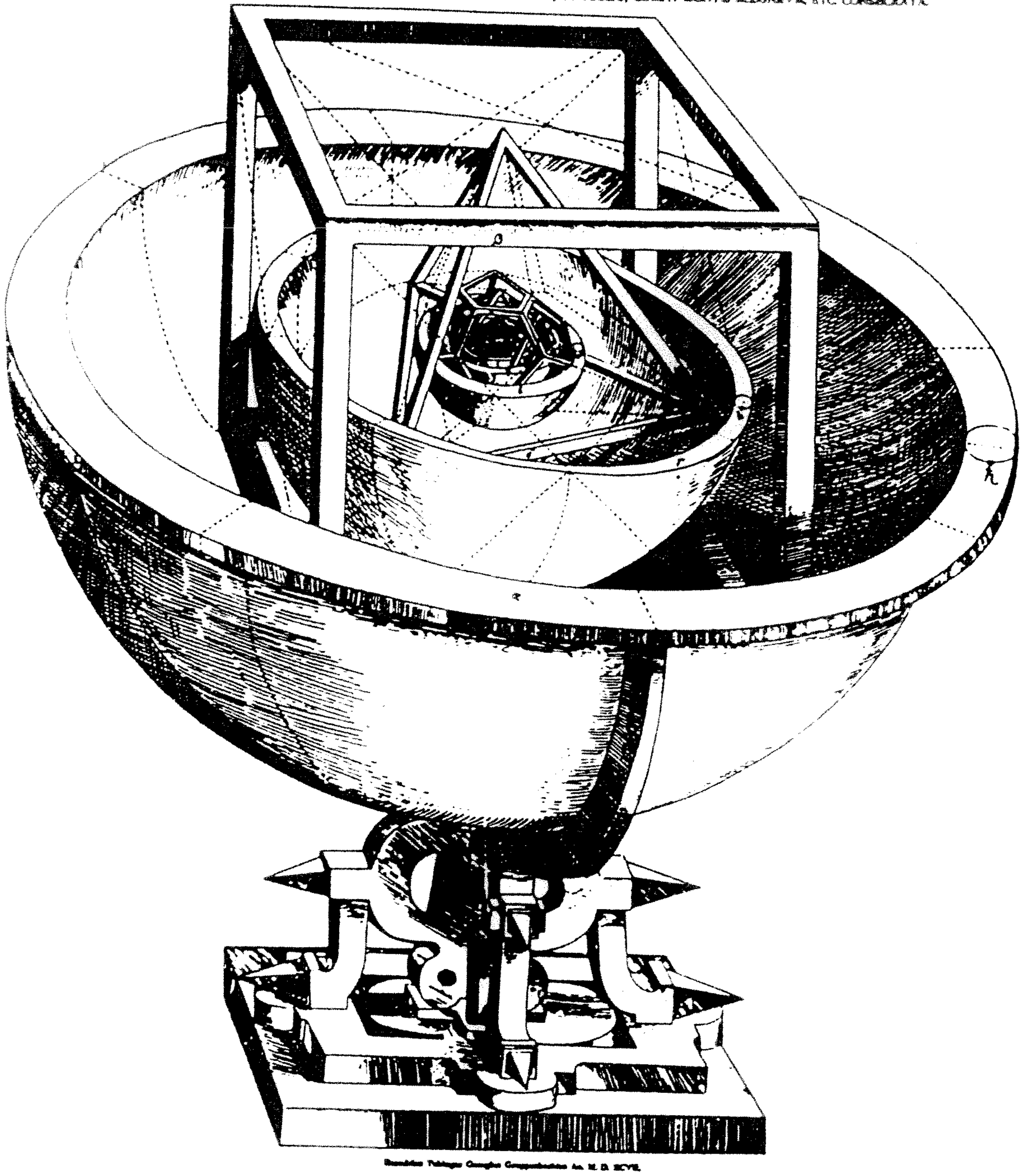
TETRAHEDRON Fire | OCTAHEDRON Air | ICOSAHEDRON Water | CUBE Earth | DODECAHEDRON The Universe

De platonska kropparna ovan ger vackra tillämpningar av gruppteorin. Tyvärr ledde de också kemin på villovägar ett par årtusenden med alkemi och guldmakeri som följd. Nedan finns en modell av solsystemet, som Kepler satte upp och som han senare förkastade, då mätningar visade att den inte stämde överens med verkligheten.

TABELLA III.

ORBIVM PLANETARVM DIMENSIONES, ET DISTANTIAS PER QVINQVE REGVLARIA CORPORA GEOMETRICA EXHIBENS.

ILLVSTRISS°. PRINCIPI, AC DÑO, DÑO FRIDERICO, DVCI WIRTENBERGICO, ET TECCIO, COMITI MONTIS BELGARVM, ETC. CONSECRATA.



[illegible] An. M. D. XCVI.