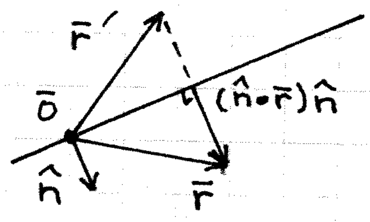
GK1 i Matematik, supplement 1/06 — Metsalo

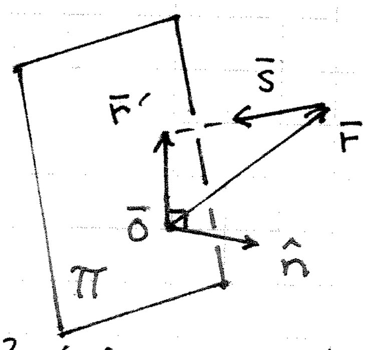
På insidan av detta blad finns några extra uppgifter för att göra somliga av alla de nya begreppen mer bekanta. Attackera dem gärna och glöm inte mottagningstiderna. Likaså finns där ett ex. på invertering av en 4×4-matris mha. Gauss-Jordans metod.
Nedan och på baksidan beskrivs vissa enkla manipulationer av $\mathbb{R}^3$, som kan beskrivas mha. matriser och vektorer.
Läs kap. 8.1-3 (uppl. 8)/kap. 9.1-3 (uppl. 9) i Kreyszig för att friska upp minnet och observera, att Kreyszig definierar såväl skalär- som vektorprodukten på två olika, men ekvivalenta sätt: dels geometriskt (def. 1), dels mha. komponenter (def. 2). De är alltså geometriska storheter (enl. def. 1), men beräknas lämpligast mha. komponenterna enligt def. 2.

Manipulationer av $\mathbb{R}^3$ (bestående av kolumnvektorer $\bar{r}$) mha. vektorer och matriser:

1) Translation med vektorn $\bar{a}$: $\bar{r} \to \bar{r} + \bar{a}$ (vektoradd.)
2) Skalning med faktorn λ: $\bar{r} \to \lambda\bar{r}$ (mult. m. skalär)
3) Spegling i (hyper-)plan med enhetsnormalen $\hat{n}$ genom origo:
$\bar{r} \to \bar{r}' = \bar{r} - 2(\hat{n}\cdot\bar{r})\hat{n} =$
$= (I - 2\hat{n}\hat{n}^T)\bar{r} = H\bar{r}$ (matrismult.)

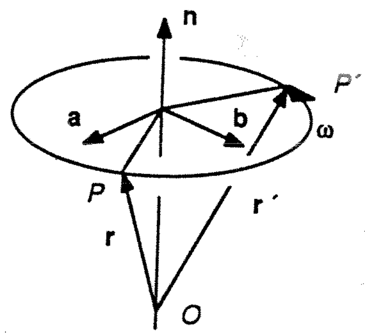


4) Parallellprojektion på planet Π med enhetsnormalen $\hat{n}$ genom origo i riktningen $\bar{s}$ ($\hat{n}\cdot\bar{s} \neq 0$):
$\bar{r} \to \bar{r}' = \bar{r} + \alpha\bar{s}$, där
$\alpha = -(\hat{n}\cdot\bar{r})/(\hat{n}\cdot\bar{s}) = -\frac{\hat{n}^T\bar{r}}{\hat{n}^T\bar{s}}$,
så $\bar{r}' = \bar{r} - \frac{\hat{n}^T\bar{r}}{\hat{n}^T\bar{s}}\cdot\bar{s} = \bar{r} - \frac{1}{\hat{n}^T\bar{s}}\cdot\bar{s}\cdot\hat{n}^T\bar{r} =$
$= (I - \frac{1}{\hat{n}^T\bar{s}}\cdot\bar{s}\hat{n}^T)\bar{r} = P\bar{r}$
(åter en matrismult.)



5a) Vridning vinkeln ω kring origo i $\mathbb{R}^2$ (dvs. planet):
$$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \bar{r}' = U\bar{r} = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
(åter en matrismult.)
5b) Vridning någon vinkel kring någon axel genom origo i $\mathbb{R}^3$ (dvs. rummet) ges på baksidan.
6) Kombinationer av dessa manipulationer.

5b) Nedan härleds vridningsmatrisen U för vridning av rummet $\mathbb{R}^3$ vinkeln ω kring en axel genom origo med (enhets-) riktningsvektorn $\hat{n}$. Texten är stulen ur Simo K. Kivelä: Algebra ja Geometria. Märk, att vektorprodukten kan ges mha. matrismultiplikation:



$$\hat{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \ \bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{n} \times \bar{r} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = N^{\times} \cdot \bar{r}.$$

Märk, att $N^{\times}$ är en anti-symmetrisk 3×3-matris.
Vi har $\bar{r} \to \bar{r}' = U\bar{r}$ (åter en matrismult.).

Olkoon $\mathbf{n}$ kiertoakselin suuntavektori ($|\mathbf{n}| = 1$) ja olkoon ω kiertokulma; näiden suunnat on valittava siten, että jos oikeakätistä ruuvia kierretään kiertokulman positiiviseen suuntaan, se alkaa edetä vektorin $\mathbf{n}$ suuntaan. Olkoot $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ kaksi yksikkövektoria, jotka ovat kohtisuorassa vektoria $\mathbf{n}$ vastaan siten, että $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n}\}$ on ortonormeerattu oikeakätinen kanta. Tällöin on erityisesti $\mathbf{n} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ ja $\mathbf{n} \times \mathbf{b} = -\mathbf{a}$.

Argumenttipisteelle $P \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r} \mathrel{\widehat{=}} x$ saadaan nyt esitys

$$\mathbf{r} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \rho(\cos\varphi\,\mathbf{a} + \sin\varphi\,\mathbf{b}),$$

missä ρ on pisteen kohtisuora etäisyys akselista. Tällöin on $\mathbf{n} \times \mathbf{r} = \rho(\cos\varphi\,\mathbf{b} - \sin\varphi\,\mathbf{a})$. Kuvapiste $P' \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}' \mathrel{\widehat{=}} x'$ saadaan kiertämällä vektorin $\mathbf{r}$ jälkimmäistä komponenttia kulman ω verran:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \rho[\cos(\varphi + \omega)\mathbf{a} + \sin(\varphi + \omega)\mathbf{b}] \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \cos\omega\,[\rho(\cos\varphi\mathbf{a} + \sin\varphi\mathbf{b})] + \sin\omega\,[\rho(-\sin\varphi\mathbf{a} + \cos\varphi\mathbf{b})] \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \cos\omega\,[\mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}] + \sin\omega\,[\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \end{aligned}$$

eli koordinaattimuodossa

$$\begin{aligned} x' &= (n^{\mathrm{T}}x)n + \cos\omega\,[x - (n^{\mathrm{T}}x)n] + \sin\omega\,[N^{\times}x] \\ &= [nn^{\mathrm{T}} + (\cos\omega)(I - nn^{\mathrm{T}}) + (\sin\omega)N^{\times}]x, \end{aligned}$$

missä $N^{\times}$ on ristitulon esitysmatriisi: $\mathbf{n} \times \mathbf{r} \mathrel{\widehat{=}} N^{\times}x$.

Kiertokuvauksen matriisi on siis

$$U = nn^{\mathrm{T}} + (\cos\omega)(I - nn^{\mathrm{T}}) + (\sin\omega)N^{\times}.$$

X1) Genomför de geometriska beräkningarna i $\mathbb{R}^n$:

a) Bestäm längden hos vektorn $\bar{u} = (1, -1, 1, -1)$ i $\mathbb{R}^4$.

b) Dito för $\bar{v} = (1, 3, 4, -5, 7)$ i $\mathbb{R}^5$.

c) Dito för $\bar{w} = (1, 2, 3, \ldots, 23, 24)$ i $\mathbb{R}^{24}$.

d) Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\bar{u} = (-1, 0, 2, 3, -6)$ och $\bar{v} = (1, 3, 4, -5, 7)$ i $\mathbb{R}^5$.

e) Dito för $(1, -2, 2, 0)$ och $(1, 1, 5, 3)$ i $\mathbb{R}^4$.

X2) Visa att följande vektorer spänner resp. vektorrum:

a) $\{(0,0,0,1), (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1)\}$; $\mathbb{R}^4$

b) $\{(-1,2,4), (-5,2,-2), (2,0,3), (1,2,3)\}$; $\mathbb{R}^3$

c) $\{p_1(x) = x+2,\ p_2(x) = 2x+1\}$; $P_1 = \{$polynom av grad $\leq 1\}$

X3) Förklara varför följande vektorer inte spänner vektorrummet:

a) $\{(-3,1,0), (1,1,1), (0,0,0), (-1,7,5)\}$; $\mathbb{R}^3$

b) $\{(1,3,2,2), (5,7,1,0), (-1,-2,-4,3)\}$; $\mathbb{R}^4$

c) $\{p_1(x) = x^2-2x+1,\ p_2(x) = 3x^2-x-2,\ p_3(x) = x^2+2x-3\}$; P_2

X4) Visa att följande mängder av vektorer är linjärt oberoende:

a) $\{(1,1,0,0), (1,-1,0,0), (0,0,-2,2), (0,0,1,1)\}$

b) $\{(2,-2,0,4), (-1,2,1,-2), (1,1,2,2)\}$

X5) Förklara varför följande mängder är linjärt beroende:

a) $\{(2,3,0), (1,-2,4), (1,1,0), (1,1,1)\}$

b) $\{(1,-3,0,2,1), (-2,6,0,-4,-2)\}$

c) $\{(1,2,-1), (1,0,1), (3,-2,5)\}$

d) $\{(1,0,0), (0,0,0), (0,0,1)\}$

X6) Visa att vektorerna bildar en bas för vektorrummet:

a) $\{(0,0,0,1), (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1)\}$; $\mathbb{R}^4$

b) $\{(-3,1,0), (1,1,0), (-1,7,5)\}$; $\mathbb{R}^3$

X7) Förklara varför vektorerna inte bildar en bas:

a) $\{(-1,2,4), (-5,2,-2), (2,0,3), (1,2,3)\}$; $\mathbb{R}^3$

b) $\{(1,2,-1), (1,0,1), (3,-2,5)\}$; $\mathbb{R}^3$

c) $\{(1,2,-1), (1,0,1)\}$; $\mathbb{R}^3$

d) $\{(1,0), (0,0), (0,1)\}$; $\mathbb{R}^2$

Invertering av en 4×4-matris mha Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = A \quad \text{skall inverteras.}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{nya rad } 1 = \frac{1}{2}\cdot \text{rad } 1 \\ nr2 = r2 - (-4)\cdot nr1 \\ nr3 = r3 - 1\cdot nr1 \\ nr4 = r4 - 1\cdot nr1 \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1/2 & -1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & -5/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} nr2 = r3 \\ nr3 = r2 \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1/2 & -1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & -5/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} nr2 = \frac{1}{-1/2}\cdot r2 \\ nr1 = r1 - \frac{1}{2}\cdot nr2 \\ nr3 = r3 - 0\cdot nr2 \\ nr4 = r4 - \frac{1}{2}\cdot nr2 \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} nr3 = \frac{1}{-1}\cdot r3 \\ nr1 = r1 - (-2)\cdot nr3 \\ nr2 = r2 - 2\cdot nr3 \\ nr4 = r4 - 0\cdot nr3 \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -6 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 5 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} nr4 = \frac{1}{-3}\cdot r4 \\ nr1 = r1 - (-6)\cdot nr4 \\ nr2 = r2 - 7\cdot nr4 \\ nr3 = r3 - (-3)\cdot nr4 \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8/3 & 2 & 1/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/3 & -1/3 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & -2 \\ 8/3 & 2 & 1/3 & 7/3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1/3 & 0 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Kontroll: $A^{-1}A = I$, $AA^{-1} = I$.