Gk1 i Matematik, Hemtal för v49/06 Metsalo

Detta är näst sista hemtalsomgången. Sista föreläsningen och räkneövningen äger rum på Lucia-dagen.

Fr: 1) Vi studerar öglan $27y^2 = x^2(9-x)$ från on v48:

a) Låt öglan rotera kring x-axeln och beräkna volymen hos den droppformiga kroppen som uppstår.

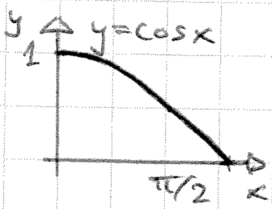
b) Låt öglan rotera kring y-axeln och beräkna volymen hos kroppen som uppstår.

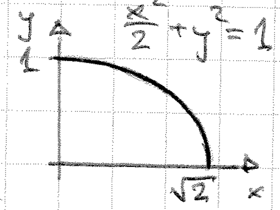
2a) Beräkna båglängden hos öglan $27y^2 = x^2(9-x)$.

b) Beräkna arean hos begränsningsytan till den droppformade kroppen i uppgift 1a) ovan

c) Beräkna arean hos begränsningsytan till kroppen i uppgift 1b) ovan.

3a) Använd variabelsubstitution till att visa att de två kurvorna till höger har samma längd.

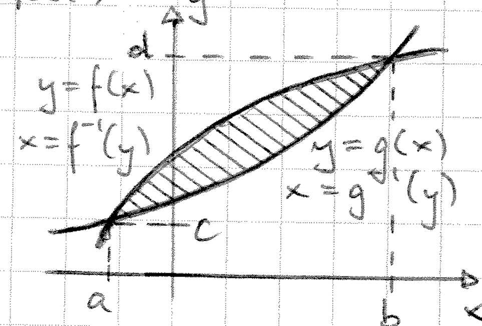




b) Approximera denna längd genom att approximera motsvarande integral med hjälp av trapetsmetoden eller Simpsons metod (välj själv) genom att dela upp integrationsintervallet i två lika långa delintervall.

c) Bestäm en övre gräns för felet i approximationen i b)-delen. (Felet beror på vilken metod vi valt: trapets eller Simpson.)

4) Låt f och g vara två funktioner, def., kont. och strängt växande i $[a, b]$ sådana att $f(a) = g(a) = c > 0$, $f(b) = g(b) = d$ och $f(x) > g(x)$ för $a < x < b$ som i fig. t.h.



Då har f och g inversfunktionerna f^{-1} resp. g^{-1}, som är def., kont. och str. väx. i $[c, d]$ sådana att $f^{-1}(c) = g^{-1}(c) = a$, $f^{-1}(d) = g^{-1}(d) = b$ och $g^{-1}(y) > f^{-1}(y)$ för $c < y < d$.

(forts. på baksidan)

4) (forts.) Då det i figuren skuggade området, som begr. av kurvorna $y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ och $y=g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=g^{-1}(y)$ roterar kring x-axeln, uppstår en rotsymm. kropp. Tvärsnittsmetoden ger att dess volym är $V_1 = {}_a\int^b \pi((f(x))^2-(g(x))^2)\,dx$, medan metoden med cylinderskal ger att volymen är $V_2 = {}_c\int^d 2\pi y\cdot(g^{-1}(y)-f^{-1}(y))\,dy$. Dessa två integraler borde ge samma värde, då det ju rör sig om samma volym. Visa att $V_1=V_2$. (Gott råd: använd variabelsubstitution och partiell integrering.)

Demo: Om en stång har (den kontinuerliga) längddensiteten $\delta(x) \geq 0$ kg/m för $x\in[a,b]$, ges dess massa av $m = {}_a\int^b \delta(x)\cdot dx$. Stångens tyngdpunkt eller masscentrum ges av $\bar{x} = \frac{1}{m}\cdot {}_a\int^b x\cdot\delta(x)\cdot dx$ och anger var stångens massa i genomsnitt finns. Storheten $J_c = {}_a\int^b (x-c)^2\cdot\delta(x)\cdot dx$ kallas för stångens tröghetsmoment kring punkten c. Tröghetsradien $\sqrt{J_{\bar{x}}/m}$ ger ett mått på hur mycket massan i genomsnitt avviker från tyngdpunkten.

Längddensiteten hos en stång med längden L (enh. m) ges av $\delta(x)=\delta_0\cdot\cos(\pi x/2L)$ för $x\in[0\text{m},L]$, där δ_0 har enheten kg/m.

a) Vi beräknar stångens massa.

b) Vi bestämmer punkten, som delar stången i två delar med samma massa.

c) Vi beräknar stångens tyngdpunkt (masscentrum) $\bar{x}$.

d) Vi bestämmer stångens tröghetsmoment $J_{\bar{x}}$ kring tyngdpunkten samt stångens tröghetsradie.

e) Vi visar att tröghetsmomentet är minst just kring tyngdpunkten $\bar{x}$.

f) Vi visar att resultatet i e)-delen gäller för godtyckliga längddensitetsfunktioner $\delta(x)\geq 0$ kg/m och inte bara för denna speciella stång.