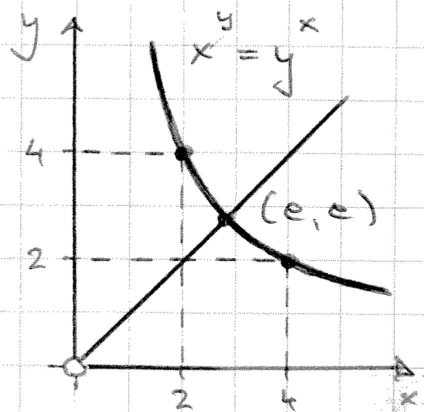
Gk1 i Matematik, hemtal v46/06 Metsalo

<u>Deltentamen 2</u> äger rum tisdagen 21.11. kl. 16–19. Samma regler gäller som för deltentamen 1. Deltentamen 2 omfattar <u>kap. P och 1–4.5</u> i Adams. De matematiska verktygen för kap. 3.4–4.5 ges i de tidigare avsnitten, så dessa tillägnas främst via <u>självstudier</u>.

Den sista delen av kursen behandlar integrering. På <u>baksidan</u> finns en sammanfattning av formlerna för integralens tillämpningar. Mera om dessa dock senare.



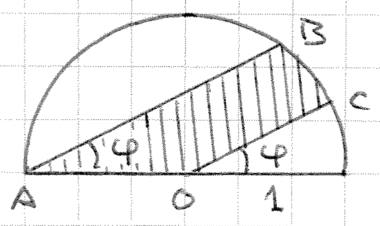
Ov: 1) Kurvan $x^y = y^x$, $x, y > 0$ består av två grenar, nämligen linjen $x = y$ och en gren, som bl.a. går genom punkterna $(2,4)$, (e,e) och $(4,2)$. Bestäm kurvans lutning i punkten $(4,2)$.

2) Calvin håller på att fylla en sfärisk ballong med vatten så att vattenvolymens ökningshastighet är konstant f (enh. dm^3/min). Hur fort ökar ballongens area (enh. dm^2/min) och radie (enh. dm/min) i det ögonblicket då arean är A_0 (enh. dm^2). Ge svaren uttryckta i f och/eller A_0.

3) Hållfastheten hos en takbalk av trä med rektangulärt tvärsnitt är proportionell mot produkten $b \cdot h^2$ av bredden b och kvadraten av höjden h. Av en stock med diametern d sågas en balk med största möjliga hållfasthet. Bestäm bredden och höjden uttryckta i stockens diameter.

v.g. vänd.

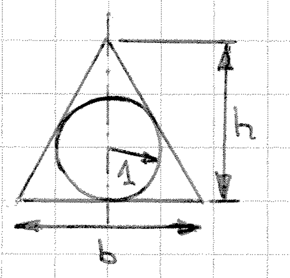
4) I en halvcirkel med radien 1, med medelpunkten O och med A som diameterns ena ändpunkt dras en korda AB och parallellt med den en radie OC. Hur stor är maximala arean hos området OCBA (skuggat i figuren)?



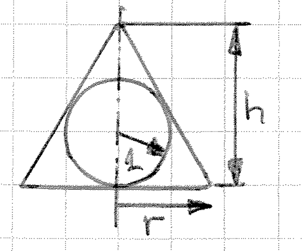
Demo: Vi visar att arctan inte är en rationell funktion, trots att dess derivata är en rationell funktion. Derivatan av en rationell funktion är alltid en rationell funktion, men antiderivatan av en rationell funktion behöver alltså inte vara en rationell funktion!

Fr: 1) En stålbehållare på formen av en rät cirkulär cylinder tillverkas av två cirkulära skivor vilka bildar cylinderns ändar (lock och botten) samt en rektangulär skiva som böjs till cylinderns mantelyta. Behållaren skall ha den föreskrivna volymen V. Vilket förhållande mellan radien r och höjden h hos cylindern minimerar plåtkostnaden, om kvadratmeterpriset för plåten till mantelytan är 5 gånger så högt som kvadratmeterpriset för plåten till lock & botten?

2a) Visa att av alla likbenta trianglar, i vilka en cirkel med radien 1 får plats, är det den liksidiga triangeln med höjden 3, som har den minsta arean.



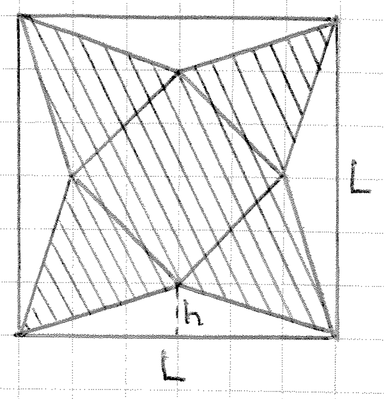
b) Bestäm radien r och höjden h hos den räta cirkulära konen med den minsta volymen, i vilken en sfär med radien 1 får plats (den 3-dimensionella analogin till problemet i a)-delen).



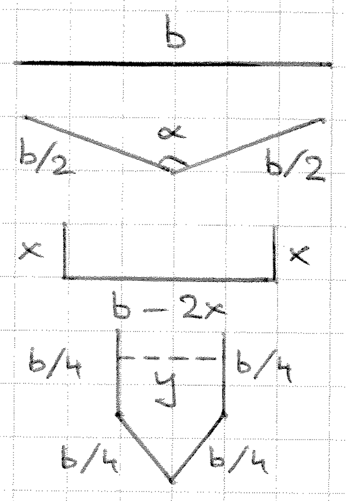
3) Svatta har en pappkvadrat med sidlängden L. Om hon klipper bort fyra likbenta trianglar med höjden h från kvadratens sidor, kan hon vika resten av kvadraten (skuggad i figuren)

(forts.)

3) forts) till en pyramid med kvadratisk botten genom att vika upp de fyra återstående likbenta trianglarna så de bildar pyramidens sidor. Vilket förhållande mellan h och L maximerar pyramidens volym och hur stor är denna maximala volym?



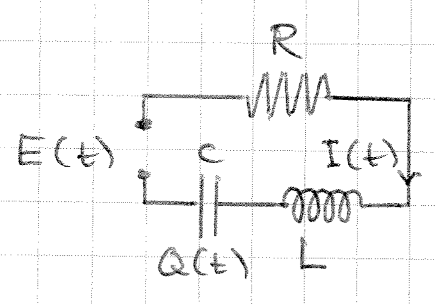
4) Långa plåtremsor av bredd b vikas på tre olika sätt till stuprännor som i figurerna till höger. Bestäm värdet på respektive parameter så att stuprännans tvärsnitts-area maximeras. Hur stor blir den maximala tvärsnittsarean i resp. fall?



Demo: a) Vi har en RLC-krets som till höger. Strömmen $I(t)$ och laddningen $Q(t)$ satisfierar differential-ekv.

$$R \cdot I(t) + L \cdot I'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = E(t),$$

där $I(t) = Q'(t)$.



Vi bestämmer $Q_H(t)$ och $I_H(t)$ (homogena lösningarna, dvs. då $E(t) \equiv 0\,V$) i fallet $0\,\Omega < R < 2\sqrt{L/C}$ (vilket ger dämpad svängning).

b) Nu lägger vi på växelspänningen $E(t) = E_0 \cdot \sin(\omega t)$, där $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Över resistorn får vi spänningsfallet $E_R(t) = R \cdot I(t)$, över spolen $E_L(t) = L \cdot I'(t)$ och över kondensatorn $E_C(t) = \frac{1}{C} \cdot Q(t)$. Vi bestämmer $E_{R_{max}}$, $E_{L_{max}}$ och $E_{C_{max}}$ för den stationära lösningen (som inte avklingar med tiden).

Sammanfattning av formlerna för integralens tillämpningar

Area: $\Delta A \approx h \cdot \Delta b$, $\Delta A \approx b \cdot \Delta h$
(i pol. koord: $\Delta A \approx \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \Delta\theta$)

Volym:
Tvärsnittsmetoden: $\Delta V \approx A \cdot \Delta b$
Specialfall: rot. symm. kropp
$\Delta V \approx A \cdot \Delta b = \pi(r_2^2 - r_1^2) \cdot \Delta b$
Cylindriska skal (end. för rot. symm. kropp)
$\Delta V \approx 2\pi r \cdot h \cdot \Delta r$

Båglängd: $\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x/\Delta t)^2 + (\Delta y/\Delta t)^2} \cdot \Delta t$
(i $\mathbb{R}^3$: $\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x/\Delta t)^2 + (\Delta y/\Delta t)^2 + (\Delta z/\Delta t)^2} \cdot \Delta t$)

Area hos rot. symm yta:
$\Delta A \approx 2\pi r \cdot \Delta s$, Δs från båglängden ovan.

(Tröghetsmoment map. en axel a:
$\Delta J_a \approx \Delta m \cdot r_a^2$, där r_a är avst. till axeln.)

Massa och tyngdpunkt hos en tråd med variabel dens:
$\Delta m \approx \rho \cdot \Delta s$, Δs från båglängden ovan
$x_T = \frac{1}{m} \cdot \int x\,dm$, $y_T = \frac{1}{m} \cdot \int y\,dm$, $z_T = \frac{1}{m} \cdot \int z\,dm$

Tyngdpunkten hos en plan homogen skiva:
ΔA från area ovan
$x_T = \frac{1}{A} \cdot \int x\,dA$, $y_T = \frac{1}{A} \cdot \int y\,dA$
(här måste ΔA ha konstant x resp. y, men en tunn homogen strimla har sin tyngdpunkt i mitten)

Arbete: $\Delta W \approx F \cdot \Delta s$, $\Delta W \approx \Delta F \cdot s$

Vätsketryck: $P = \rho \cdot g \cdot d$ (dens. · grav. · djup)
Kraft: $\Delta F \approx P \cdot \Delta A \approx \rho g d \cdot \Delta A$

Motsv. integral fås sedan som gränsvärdet av en summa, som i allmänhet kommer att vara en Riemann-summa.