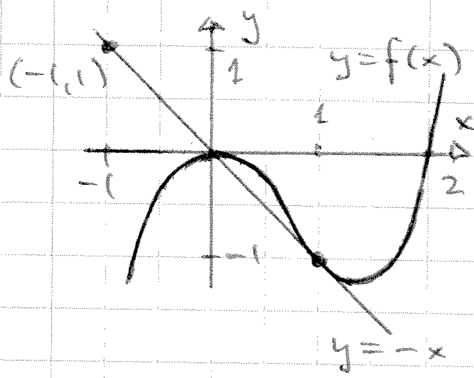
Gk1 i Matematik, hemtal v45/06 Metsalo

Torsdagen 9.11. har vi 2:a datorövningen, då vi använder programpaketet Mathematica. Uppgifterna till datorövningen delas ut separat.



Ov: 1) $f(x) = x^2(x-2)$. Linjen $y = -x$ är en tangentlinje till grafen $y = f(x)$, nämligen i punkten $(1, -1)$ som går genom punkten $(-1, 1)$. Dess lutning är naturligtvis -1. Bestäm lutningen hos alla andra tangentlinjer till grafen $y = f(x)$, som går genom punkten $(-1, 1)$.

2) En boll släpps ned från ett 80 m högt torn. 3 s senare kastas en annan boll efter den första. Med vilken begynnelsehastighet måste den andra bollen kastas för att bollarna skall träffa marken samtidigt? Bortse från luftmotståndet och använd $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ för enkelhets skull.

3) Ekvationen $x^2 + e^{3x} = y + \cos y$ definierar funktionen $y = f(x)$ implicit i en omgivning av $x = 0$ så att $f(0) = 0$. Beräkna $f'(0)$ och $f''(0)$.

4) Investmentbolaget Bluff & Båg utlovar exponentiell tillväxt på sina kunders pengar med en fördubbling av kapitalet på bara 3 år. En kund investerar 1.500 € hos B&B.

a) Hur stort är kundens kapital efter 2 år (exakta svaret och svaret avrundat till hela €)?

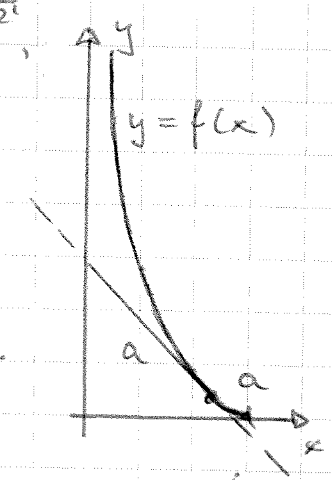
b) Hur länge dröjer det innan kapitalet ökat till 4.000 € (exakta svaret och svaret avrundat till hela månader)?

Demo: a) Antag att funktionen $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfierar i) $g'(0) = 1$ och ii) $g(x_1 + x_2) = g(x_1) \cdot g(x_2)$. Vi visar att $g(x) = \exp(x)$, så exponentialfunktionen kan definieras via dessa två krav.

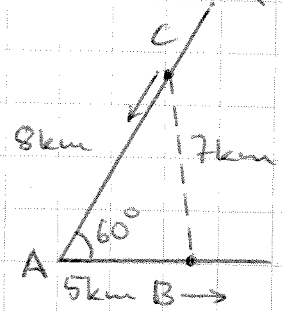
b) Mha. hjälpfunktionen $h(t) = \frac{1}{t} \cdot \ln t$ visar vi att $2^4 = 4^2$ är den enda icke-triviala heltalslösningen till ekvationen $a^b = b^a$; $a, b > 0$ ($a = b$ ger triviala lösningar).

Fredagens hemtal på baksidan

Fr. 1) Kurvan $y=f(x)=a\cdot\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)-\sqrt{a^2-x^2}$, $0<x\leq a$, kallas för en traktris, men är mera känd under namnet hundkurvan. Visa att den delen av varje tangentlinje till kurvan, som begränsas av tangeringspunkten och y-axeln alltid har längden a.

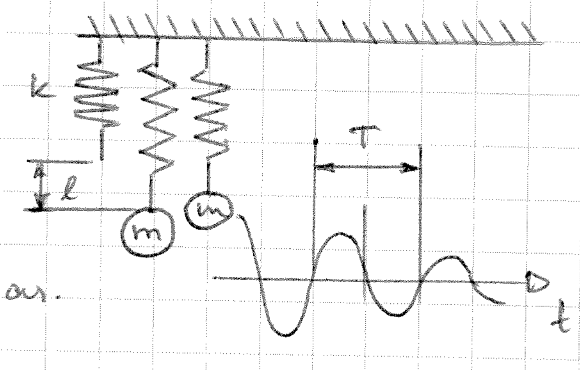


2) Från staden A utgår två vägar, som bildar vinkeln 60°, som i fig. På den ena vägen finns en bil B, på avståndet 5km från staden, som åker bort från staden med hastigheten 55 km/h. På den andra vägen finns en cyklist C, på avståndet 8km från staden. Hur fort skall cyklisten åka in mot staden för att avståndet till bilisten inte skall ändras i det aktuella ögonblicket?



3) 4.5.43/43/46 (uppl. 4/5/6) i Adams
4) 4.5.24/24/26 (—"—) i Adams

Demo: Vi studerar den dämpade harmoniska oscillatorn till höger och bestämmer fjäderkonstanten och dämpningen mha. enkla mätningar.



Mellanförhör 2 från 2005 och 2004 (då egenvärden och -vektorer ingick i mellanförhörsområdet) finns på insidan av denna räknestugelapp.

Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.1510 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

Mellanförhör nr 2 14.11.2005

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

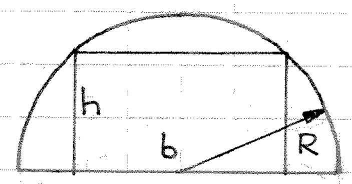
Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

1. Beräkna följande gränsvärden (om de existerar):

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-4\sqrt{x}+3}{x^2-1} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{2x+\sin(3x)}{3x+\sin(2x)} \qquad c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin(3x)}{3x+\sin(2x)}$$

(Om någon vill använda l'Hospitals regel, så går det bra, men eftersom l'Hospitals regel ännu inte visats på föreläsningarna måste man i så fall visa den först!)

2. a) Bestäm basen b och höjden h hos rektangeln med maximal area, som ryms i en halvcirkel med radien R så att basen vilar på halvcirkelns diameter som i figuren till höger.
b) Bestäm basen b och höjden h hos rektangeln med maximal omkrets, som ryms i en halvcirkel med radien R så att basen vilar på halvcirkelns diameter som i figuren till höger.
(Förenkla svaren! Lämna t.ex. inte uttryck på formen $\sqrt{9}$ eller $\cos 0$, utan skriv i stället 3 respektive 1.)



3. Vi studerar ellipsen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, där $a,b>0$.
Bestäm ekvationen för ellipsens tangentlinje i punkten $(x,y)=(\frac{5a}{13},-\frac{12b}{13})$
a) med hjälp av implicit derivering
b) genom att lösa ut $y=y(x)$ explicit och sedan derivera.

4. Produkten $f\cdot g$ av två funktioner f och g definieras via $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$. Visa att om f och g är differentierbara i punkten x_0 (dvs. om $f'(x_0)$ och $g'(x_0)$ bägge existerar), så är även $f\cdot g$ differentierbar i punkten x_0 och $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$. (Det är alltså deriveringsformeln för en produkt, som skall visas. Räkneregler för gränsvärden får antas vara kända.)

Nyttiga (?) formler:
$\cos^2 t+\sin^2 t=1, \cos^2 t=(1+\cos(2t))/2, \sin^2 t=(1-\cos(2t))/2, \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1,$
$\sin(u\pm v)=\sin(u)\cos(v)\pm\cos(u)\sin(v), \cos(u\pm v)=\cos(u)\cos(v)\mp\sin(u)\sin(v).$

Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.451 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

Mellanförhör nr 2 8.11.2004

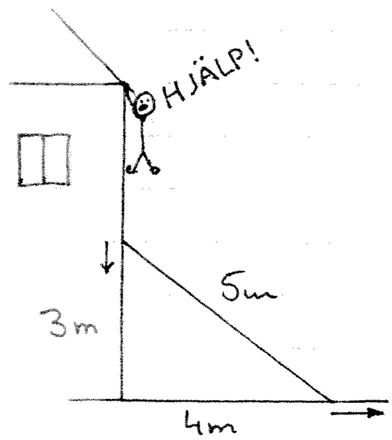
Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

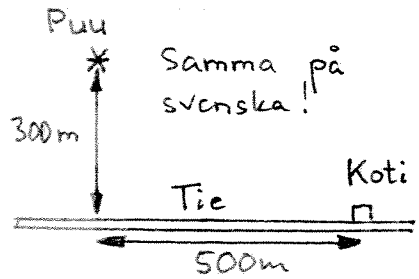
1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestäm egenvärdena till matrisen $A^T A$ samt någon egenvektor till vart och ett av egenvärdena.



2. En $5m$ lång stege glider ned längs och ut från en vägg. Då dess övre ända befinner sig på höjden $3m$ (och den nedre ändan följdaktligen på avståndet $4m$ från väggen), glider den nedåt med hastigheten $20cm/s$. Hur fort glider den nedre ändan ut från väggen i just det ögonblicket?



3. Calvin står under ett träd $300m$ in i skogen. På grund av ett allvarligt tankefel vid planerandet av sitt uppförande vill han hem! Dit är det $500m$ längs vägen. Calvin kan gå $4km/h$ i skogen och $5km/h$ längs vägen. Hur skall han gå för att komma hem så fort som möjligt och hur lång tid tar det honom att komma hem i så fall?

4. Tangent-funktionen $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$ är bijektiv, kontinuerlig och strängt växande och har följdaktligen en inversfunktion $\arctan : \mathbf{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (ofta också betecknad $\tan^{-1}$), som även den är bijektiv, kontinuerlig och strängt växande. Visa utgående från tangent-funktionens egenskaper att inversfunktionens derivata måste vara

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$