Gk1 i Matematik, hemtal v41/06 Metsalo

Deltentamen 1 äger rum tisdagen 17.10. kl. 16-19. Sal kommer att anslås i huvudaulan och utanför tentamenssalarna senast en timme före tentamen. Deltentamen 1 omfattar de algebraiska grundbegreppen, induktion, komplexa tal samt kap. 6.1-7.3 (uppl. 8) / kap. 7.1-8.3 (uppl. 9) i Kreyszig. Märk dock att flera av bevisen av resultaten i kap. 7.3/8.3 finns i kap. 7.4/8.4. Studera dem där!

http://math.tkk.fi/opetus/misc/tenttiohjeet.html.se innehåller information om reglerna för tentamina.
Till deltentamina får vanliga funktionsräknare medtagas. Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte medtagas. Tentanden måste kunna legitimera sig.
På insidan av detta blad finns några gamla deltentamina.
Torsdagen 19.10. har vi 1:a datorövningen, då vi använder programpaketet Matlab.
Efter mellanförhöret börjar vi med Adams.

Ov: 1) Visa att följande resultat gäller i alla vektorrum (och inte bara i t.ex. vektorrummet $\mathbb{R}^n$):
a) $(-1)\bar{u} = -u$ b) $\alpha\bar{0} = \bar{0}$ c) $\alpha\bar{u} = \bar{0} \Rightarrow \alpha = 0$ el. $\bar{u} = \bar{0}$.

2a) Visa att $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\} = \{[0,0,0,1], [0,0,1,0], [0,3,0,-1], [5,0,-3,0]\}$ bildar en bas för $\mathbb{R}^4$ och skriv $\bar{u} = [1,1,2,1]$ som en linjär kombination av $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$, dvs. på formen $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4$ genom att sätta upp motsvarande linjära ekvationssystem för koefficienterna c_1, c_2, c_3, c_4 och lösa det mha. Gauss' elimination och bakåtsubstitution eller mha. Gauss-Jordan.

b) Visa att $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} = \{[2,1,3], [1,-2,0], [6,3,-5]\}$ bildar en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$, dvs. en bas där basvektorerna är ortogonala. Använd ortogonaliteten till att skriva $\bar{u} = [3,1,1]$ som en linjär komb. av $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ (vi slipper lösa ett linjärt ekv.system!).

3a) Inför en inre produkt i vektorrummet P_3 bestående av polynom av grad ≤ 3 via $\langle f, g\rangle \overset{\text{def}}{=} \int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)\,dx$.
Visa att polynomen $p_0(x) \equiv 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = 3x^2 - 1$, $p_3(x) = 5x^3 - 3x$ bildar en ortogonal bas för P_3 under denna inre produkt.

Forts. på baksidan

3b) Använd ortogonaliteten (analogt med 2b) ovan) till att skriva $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ som en linjär kombination av p_0, p_1, p_2, p_3.

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ a) För ett visst värde på α är $\bar{x}$ en egenvektor till A. Bestäm detta α-värde samt egenvärdet λ, till vilket $\bar{x}$ i så fall hör.

b) A och A^T har samma egenvärden. Bestäm en egenvektor till A^T, som hör till λ i a)-delen.

Demo: Låt A ha egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Vi visar

a) A^T har också egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

b) $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$

c) $A^{-1} \exists \iff \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n \neq 0$

d) Om $A^{-1} \exists$, är dess egenvärden $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \dots, 1/\lambda_n$.

Fr: 1) $A = \begin{pmatrix} -15 & 24 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a) Beräkna $\det(A) = |A|$

b) Beräkna $\mathrm{inv}(A) = A^{-1}$

c) Lös det linjära ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{b}$

d) Bestäm A:s karaktäristiska polynom $p_A(\lambda)$

e) Bestäm A:s egenvärden

f) Bestäm egenvektorerna till resp. egenvärde.

2a) En matris $A \ni A^2 = A$ kallas <u>idempotent</u>. Visa att idempotenta matriser endast kan ha egenvärdena 0 och 1.

b) Visa att parallellprojektionsmatrisen $P = I - \frac{1}{\hat{n}^T \bar{s}} \cdot \bar{s}\hat{n}^T$ i manipulation 4 i supplement 1 är idempotent.

3) B är en godtycklig $n \times n$-matris. Visa att om λ är ett egenvärde till B, så är λ^2 ett egenvärde till B^2.

4) Antag att f är en funktion, vars definitionsmängd är origo-symmetrisk, dvs. $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$. Då är $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2} \cdot (f(x) - f(-x))$. Visa att $g(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + f(-x))$ är en <u>jämn</u> funktion, dvs. att $g(-x) = g(x)$ och att $h(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) - f(-x))$ är en <u>udda</u> funktion, dvs. att $h(-x) = -h(x)$.

Visa också att detta är <u>enda</u> sättet att skriva f som en summa av en jämn och en udda funktion.

Demo-tiden används till besvarande av frågor inför mellanförhöret.

Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.451 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

Mellanförhör nr 1 11.10.2004

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

1. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & +y & +z & =1 \\ x & +2y & +5z & =3 \\ x & -2y & +z & =0 \\ 2x & +y & -2z & =0 \end{cases}$$

2. Komplexkonjugatet $\overline{z}$ av ett komplext tal $z = x+iy$ definieras som $\overline{z} = x-iy$ och produkten $z \cdot w$ av två komplexa tal $z = x+iy$ och $w = u+iv$ som $z \cdot w = (xu - yv) + i(xv + yu)$. Visa att $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \ldots \cdot \overline{z_n}$ för $n = 2, 3, 4, \ldots$.

3. a) En kvadratisk matris C kallas *symmetrisk*, om $C^T = C$ och *anti-symmetrisk*, om $C^T = -C$. Låt A och B bägge vara $n \times n$-matriser. Visa att om A och B bägge är symmetriska eller bägge är anti-symmetriska, så är matrisen $C = AB - BA$ anti-symmetrisk, medan om den ena av A och B är symmetrisk och den andra är anti-symmetrisk, så är matrisen $C = AB - BA$ symmetrisk.
b) Visa att om A är inverterbar, så är även A^T inverterbar och $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

4. Bestäm talet t så att planet, som går genom de tre punkterna $(t, 2, 0)$, $(0, 4, 1)$ och $(0, 1, 1)$ också går genom punkten $(3, 3, 7)$.

I morgon är det tisdag. Då kan detta mellanförhör diskuteras kl. 13:00-13:30 i TF:s bibliotek vid gamla mötesrumsbordet.

Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.451 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

Mellanförhör nr 2 8.11.2004

1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestäm egenvärdena till matrisen $A^T A$ samt någon egenvektor till vart och ett av egenvärdena.

Mat.-1.451 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1 **Metsalo**

Mellanförhör nr 1, 2003-10-13

1. Talen a_n definieras på följande sätt:
$$a_1 = \sqrt{\pi}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \quad \text{för } n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}.$$
Visa med hjälp av induktion att

a) $a_n > 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$ (1p.)

b) $a_n < 2$ för alla $n \in \mathbb{N}$ (2p.)

c) $a_{n+1} > a_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$ (3p.)

2. Lös 2:a-gradsekvationen $iz^2 + (5-2i)z - (11+7i) = 0$.
Redovisa alla mellanstegen.

3a) Beräkna determinanten hos 4×4-matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$
b) Lös det linjära ekvationssystemet
$$\begin{cases} x+y+3z = 2 \\ 3y+4z = -1 \\ 2x-y+2z = 5 \\ 3x+5z = 7 \end{cases}$$

4a) Förklara vad som menas med att en mängd vektorer i ett reellt vektorrum är linjärt oberoende.

b) Undersök huruvida de fyra 2×2-matriserna
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$
i vektorrummet bestående av reella 2×2-matriser är linjärt oberoende eller inte.

Mat.-1.451 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1 Metsalo

Mellanförhör nr 1, 14.10.2002

1. Då $a=1$, är $1+2a+3a^2+\ldots+na^{n-1} = 1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$ för $n=1,2,3,\ldots$.
Detta har visats på föreläsningen och behöver inte visas här.
Visa att då $a \neq 1$, är $1+2a+3a^2+\ldots+na^{n-1} = (1-(n+1)a^n+na^{n+1})/(1-a)^2$
för $n=1,2,3,\ldots$.

2. Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Ange vilka av följande uttryck inte är definierade samt beräkna de, som är definierade:
a) $A - 3C$ b) $B^2 - 2B$ c) AA^T d) ABC e) CBA f) $(AC)^{-1}$

3. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \\ 1 & 4 & 16 & 7 \end{pmatrix}$ och $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.
a) Beräkna $\det(A)$.
b) Beräkna $\mathrm{inv}(A) = A^{-1}$.
c) Lös det linjära ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{b}$.

4. Planet Π innehåller z-axeln samt punkten $P:(7,5,3)$. I vilken punkt skär planet Π skärningslinjen mellan planen $8x - 11y = 2$ och $88x + 77y - z = 0$?