Gk1 i Matematik, hemtal v39/06 Metsalo

På insidan av detta blad attackeras några linjära ekvationssystem mha. Gauss-Jordans metod. Studera dem! I Kreyszig uppl. 8 förekommer (åtminstone) 2 tryckfel: formel 2a), sid. 313: $C(A+B)=CA+CB$ och formel 1, sid. 370: $A\bar{x}=\lambda\bar{x}$. Rätta dessa! (I uppl. 9 har Kreyszig själv rättat dem.)

On: 1a) Om A är en $n\times n$-matris, så är $A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$. Visa att $\frac{1}{2}(A+A^T)$ är symmetrisk och $\frac{1}{2}(A-A^T)$ antisymmetrisk. Visa också att detta är enda sättet på vilket A kan skrivas som summan av en symm. och en anti-symm. matris.

b) Låt B vara en godtycklig $m\times n$-matris. Visa att B^TB och BB^T bägge är symmetriska matriser.

2a) Ge någon reell 2×2-matris $A\neq 0$ (nollmatrisen) sådan att $A^2=A\cdot A=0$. Märk: det finns inga reella eller komplexa tal med motsvarande egenskap.

b) Ge någon reell 2×2-matris B sådan att $B^2=B\cdot B=-I$. Märk: det finns inga reella tal med motsvarande egenskap, men väl två komplexa: $\pm i$.

3) Bestäm allmänna lösningen till ekvationssystemet:

a) $\begin{cases} 4x+y = 4 \\ 5x-3y+z=2 \\ -9x+2y-z=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 13x+12y=-6 \\ -4x+7y=-73 \\ 11x-13y=157 \end{cases}$

4) Bestäm allmänna lösningen till ekvationssystemet:

a) $\begin{cases} 3w+2y+12z=11 \\ 2w+x+13z=1 \\ w+2x+y+14z=12 \\ 3x+2y+15z=23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+5y-10z=0 \\ 2w-3x-3y+6z=2 \\ 4w+x+y-2z=4 \end{cases}$

Demo: $\begin{cases} x+y+z=-5 \\ -x+2y-7z=11 \\ 3x+2y+\alpha z=-17 \\ x+3y-z=\beta \end{cases}$ Vi bestämmer lösningarna till det linjära ekvationssystemet för olika värden på parametrarna (talen) α och β mha. Gauss' elimination och bakåtsubstitution.

Fredagens hemtal på baksidan.

Fr: 1) $\begin{cases} \dfrac{5}{x+3y} + \dfrac{6}{x+z} = 2 \\ \dfrac{10}{x+3y} + \dfrac{7}{2y-z} = -3/2 \\ \dfrac{15}{x+z} + \dfrac{4}{2y-z} = 1/2 \end{cases}$ Lös ekvationssystemet genom att införa 3 nya variabler u, v, w via $u = 1/(x+3y)$, $v = 1/(x+z)$ och $w = 1/(2y-z)$.

2a) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 0 \\ 5x + 4y + 2w = 0 \\ x - y + z + w = 0 \\ y + 5z + 3w = 0 \end{cases}$ Bestäm allmänna lösningen till det linjära, homogena ekv.systemet m.h.a. Gauss' elimination och bakåtsubstitution.

b) $\begin{cases} x + y + 2z - w = 3 \\ 3x - y + z - 2w = 1 \\ 2x - 2y - z - w = -2 \\ x - 3y - 3z = -5 \end{cases}$ Dito för det linjära, inhomogena ekvationssystemet.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ a) Visa att ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{b}$ saknar lösning.
b) Lös ekv.systemet $A^T A\bar{x} = A^T\bar{b}$.

Sensmoral: $A\bar{x} = \bar{b} \not\Leftrightarrow A^T A\bar{x} = A^T\bar{b}$.

4) Vi studerar höger- och vänsterinverser till matriser, som inte nödvändigtvis är kvadratiska.

a) Finn någon matris $\begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix}$ sådan att $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Visa att det inte finns någon matris $\begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix}$ sådan att $\begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Den givna matrisen har höger-, men saknar vänsterinvers.)

c) Om A är kvadratisk och $\det(A) \neq 0$, så har A en unik inversmatris $A^{-1} \ni AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Visa att A inte kan ha någon annan vänster- eller högerinvers än A^{-1}, dvs. att det inte finns någon matris $B \neq A^{-1} \ni BA = I$ och inte någon matris $C \neq A^{-1} \ni AC = I$.

Demo: Fackverket till höger består av 7 stag, förenade i 5 noder och bildar tre liksidiga trianglar. Nod 0 är fäst vid underlaget, så det kan upptaga såväl horisontella som vertikala krafter, medan nod 4 rullar mot underlaget och kan bara upptaga vertikala krafter. Fackverket belastas med kraften F, fördelad som i figuren. Vi bestämmer dragkraften x_k i stag k (positiv, om staget drar i sina ändnoder och noderna i staget, negativ annars) för $k = 1, 2, \ldots, 7$.