Gk1 i Matematik, hemtal v38/06 Metsalo

På <u>insidan</u> av detta blad attackeras några linjära ekvationssystem mha. <u>Gauss' elimination med bakåtsubstitution</u> vid sidan av exemplen i kap. 6.3/7.3 (uppl. 8/uppl. 9) i Kreyszig. Senare studerar vi också Gauss-Jordans metod för lösning av linjära ekvationssystem, som dock kräver mera (dator-) tid (kap. 6.7/7.8).

Öv: 1a) $a*b=a*c \Leftarrow b=c \Rightarrow b*a=c*a$ gäller för halvgrupper. Visa att för grupper gäller även motsatsen, dvs. visa sats 4. Förklara ingående vilket axiom eller vilken sats används i varje steg.

b) $a=b \Rightarrow a^{-1}=b^{-1}$ gäller för grupper. Visa att även motsatsen gäller, dvs. visa sats 5. Förklara åter ingående.

2) Låt $(M,*)$ vara en grupp sådan att $a^{-1}=a$, $\forall a\in M$ dvs. $a*a=e$, $\forall a\in M$. Visa att gruppen är kommutativ.

3) Betrakta följande påstående $P(n)$: $1+2+3+\ldots+(n-1)+n = \frac{1}{8}\cdot(2n+1)^2$, $n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

a) Visa att "induktionssteget" håller för alla $n\geq 1$, dvs. att om $P(k)$ är sant, så är även $P(k+1)$ sant.

b) Visa att $P(n)$ trots detta är falskt för alla $n\in\mathbb{N}$.

4a) Visa att $1\cdot 3+3\cdot 5+\ldots+(2n-1)\cdot(2n+1)=\frac{n}{3}\cdot(4n^2+6n-1)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

b) Visa att om $a\neq 1$, är $1+2a+3a^2+4a^3+\ldots+na^{n-1} = (1-(n+1)\cdot a^n+na^{n+1})/(1-a)^2$ för $n=1,2,3,\ldots$

<u>Testuppgift</u>: Använd <u>exakt</u> samma argument som i uppg. 4 ovan för att visa att $n^2=n$ för $n=0,1,2,\ldots$ Om detta lyckas så har ni missförstått induktion.

Demo: Vi visar att om $(M,+,*)$ är en divisionsring, så är $(M\setminus\{0\},*)$ en grupp. Sats 6 har en central plats i beviset.

Fr: 1a) Visa att $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ och $\overline{(-z)}=-\overline{z}$ samt mha. detta att $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$.

b) Visa att $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ och $\overline{(1/z)}=1/(\overline{z})$ $(z\neq 0)$ samt mha. detta att $\overline{z_1/z_2}=\overline{z_1}/\overline{z_2}$.

c) Visa mha. induktion att $\overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\ldots\cdot\overline{z_n}$ för $n=1,2,3,\ldots$

Forts. på baksidan

2a) Visa att $z=i$ är ett nollställe till 3:e-gradspolynomet
$p(z) = z^3 + (-2-5i)z^2 + (-10+10i)z + (8+6i)$.

b) Eftersom $z=i$ är ett nollställe till $p(z)$, kan $p(z)$ faktoriseras på formen $p(z) = (z-i)\cdot q(z)$, där $q(z) = az^2 + bz + c$ är ett 2:a-gradspolynom. Bestäm $q(z)$.

c) Bestäm q:s nollställen på formen $z = x+iy$.

3) Låt $p(z)$ vara ett polynom med reella koefficienter, dvs. $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, där $a_k \in \mathbb{R}$. Visa att om $z = \alpha + i\beta$ är ett nollställe till p, dvs. om $p(\alpha+i\beta) = 0$, så är även $\bar{z} = \alpha - i\beta$ ett nollställe till p. Icke-reella nollställen till polynom med reella koefficienter kommer alltså i komplex-konjugerade par.

4) Låt $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ vara en mängd bestående av tre inte nödvändigtvis olika komplexa tal med egenskaperna
a) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1$ och b) $\lambda \in \Lambda \Rightarrow \bar{\lambda}$ och $1/\lambda \in \Lambda$.
(varvid λ, $\bar{\lambda}$ och $1/\lambda$ inte behöver vara olika).
Visa att det komplexa talet 1 måste tillhöra Λ.

Demo: Fritt efter E.A. Poe (tror jag det var):
Den gamle sjörövaren berättade på sin dödsbädd:
"Jag startade vid galgeken, gick raka vägen till stenröset, sedan lika långt åt höger och slog ned en påle i marken. Sedan återvände jag till galgeken, gick raka vägen till källan, sedan lika långt åt vänster och slog ned en ny påle. Jag grävde ned skatten mitt emellan pålarna och drog därefter ut dem."
När vi kom till ön hade vi inga svårigheter att hitta stenröset och källan, men galgeken hade ruttnat bort, så vi kunde inte finna några spår av den. I en uppenbarelse såg jag dock galgekens plats och därefter hade vi inga svårigheter att hitta skatten. Det var första gången jag fick en uppenbarelse och skatten bevisar att mina uppenbarelser är sanna. Senare har mina uppenbarelser hjälp inkvisationen att finna många kättare och det har aldrig slagit fel, utan alla kättarna har förr eller senare erkänt under inkvisationens förhör. Även detta är ett klart bevis på att mina uppenbarelser är sanna.