

Ex: Svakar, hantverkaren Pelle och Svatta köpte godis.
 Svakar köpte tre lakritsstänger och två kokosbollar för 12 mkr, Pelle köpte tre slichepinnar, en lakritsstång och en kokosboll för 13 mkr och Svatta köpte en slichepinne, fem lakritsstänger och en kokosboll för 12 mkr.

Vad kostade slichepinnen, lakritsstängan resp. kokosbollen?

Lösning: s , l och k är priset i mkr.

$$\begin{cases} \text{Svakar: } 0s + 3l + 2k = 12 \text{ (mkr)} \\ \text{Pelle: } 3s + 1l + 1k = 13 \\ \text{Svatta: } 1s + 5l + 1k = 12 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ l \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 5 & 1 & 12 \end{array} \right) \sim \{r1 \leftrightarrow r2\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 1 & 5 & 1 & 12 \end{array} \right) \sim \left\{ \begin{array}{l} nr2 = r2 - \frac{0}{3} \cdot r1 \\ nr3 = r3 - \frac{1}{3} \cdot r1 \end{array} \right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{2}{3} & \frac{23}{3} \end{array} \right) \sim \left\{ nr3 = r3 - \frac{14/3}{3} \cdot r2 \right\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -\frac{22}{9} & -11 \end{array} \right)$$

Nu är Gauss' elimination slutförd. Det nya, men ekvivalenta lin. ekv. systemet är

$$\begin{cases} 3s + 1l + 1k = 13 \\ 0s + 3l + 2k = 12 \\ 0s + 0l - \frac{22}{9}k = -11 \end{cases}$$

Bakåtsubstitution:

$$k = (-11) / (-22/9) = 9/2 = 4.50 \text{ (mkr)}$$

$$l = (12 - 2k) / 3 = \{k = 9/2\} = 1 \text{ (mkr)}$$

$$s = (13 - l - k) / 3 = \{k = 9/2, l = 1\} = 5/2 = 2.50 \text{ (mkr)}$$

Vi får alltså, att slichepinnen kostar 2.50 mkr, lakritsstängan 1.00 mkr och kokosbollen 4.50 mkr.

Vi gör klokt i att kontrollera detta via insättning i det ursprungliga problemet.

$$\therefore \begin{pmatrix} s \\ l \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.50 \\ 1.00 \\ 4.50 \end{pmatrix} \text{ satisfierar } \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ l \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$$

och andra lösningar finns inte.

Ex: Svakas, Svatta, Pelle och teknologen Osquar köpte godis. Svakas köpte två chokladkakor, fem gräddkolor och tre lakritsstänger för 23 mkr. Svatta köpte en chokladkaka, sju gräddkolor och en lakritsstång för 13 mkr. Pelle köpte en chokladkaka och sexton gräddkolor för 16 mkr och Osquar köpte fyra chokladkakor, en gräddkaka och sju lakritsstänger. Hur mycket kostade Osquars godis? Vad kostade chokladkakan, gräddkolan resp. lakritsstängen?

Lösni: c , g och l är priset i mkr. Beteckna priset för Osquars godis med x .

$$\begin{cases} \text{Svakas:} & 2c + 5g + 3l = 23 \\ \text{Svatta:} & 1c + 7g + 1l = 13 \\ \text{Pelle:} & 1c + 16g + 0l = 16 \\ \text{Osquar:} & 4c + 1g + 7l = x \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 16 & 0 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ g \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 13 \\ 16 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 23 \\ 1 & 7 & 1 & 13 \\ 1 & 16 & 0 & 16 \\ 4 & 1 & 7 & x \end{array} \right) \sim \left\{ \begin{array}{l} r_2 = r_2 - \frac{1}{2} \cdot r_1 \\ r_3 = r_3 - \frac{1}{2} \cdot r_1 \\ r_4 = r_4 - \frac{4}{2} \cdot r_1 \end{array} \right\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 23 \\ 0 & 9/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 27/2 & -3/2 & 9/2 \\ 0 & -9 & 1 & x-46 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{l} r_3 = r_3 - \frac{27/2}{9/2} \cdot r_2 \\ r_4 = r_4 - \frac{-9}{9/2} \cdot r_2 \end{array} \right\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 23 \\ 0 & 9/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-43 \end{array} \right)$$

Gauss' elimination ger följande ekvivalenta system:

$$\begin{cases} 2c + 5g + 3l = 23 \\ 0c + \frac{9}{2}g - \frac{1}{2}l = \frac{3}{2} \\ 0c + 0g + 0l = 0 \\ 0c + 0g + 0l = x - 43 \end{cases}$$

Vi får att $x = 43$, för annars saknas lösning.
 \therefore Osquars godis kostade 43 mkr.

Däremot kan vi inte bestämma c , g och l via bakåtsubstitution. Vi kan endast uttrycka c och g via l via bakåtsubstitution:

$$\begin{cases} g = \left(\frac{3}{2} - (-\frac{1}{2})l \right) / \frac{9}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}l \\ c = (23 - 5g - 3l) / 2 = \left\{ g = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}l \right\} = \frac{32}{3} - \frac{16}{9}l \end{cases}$$

l kommer att vara en valfri parameter.

Problemet's natur ger att c , g och $l \geq 0$.

Men vi får inga entydiga värden på