Linjära ekvationssystem

En ekvation på formen $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$, där a_j och c är givna konstanter och $x_1, x_2, \dots, x_n$ är obekanta, som skall bestämmas, kallas för en linjär ekvation. Om vi har m st. linjära ekvationer med samma obekanta, har vi ett linjärt ekvationssystem med n obekanta och m ekvationer.

A: Om vi har lika många ekvationer som obekanta, finns det oftast en unik lösning. Men det kan också hända, att lösning saknas eller att det finns oändligt många lösningar.

B: Om vi har fler obekanta än ekvationer, finns det oftast ∞ lösningar. Men det kan också hända, att lösning saknas.

C: Om vi har fler ekvationer än obekanta, saknas oftast lösning. Men det kan också hända, att det finns en unik lösning eller ∞ lösningar.

Förutom Gauss' elimination med efterföljande bakåtsubstitution kan linjära ekvationssystem lösas med Gauss-Jordans metod, som kombinerar dessa två steg. Även här arbetar man med den sammansatta matrisen och utför elementära radoperationer, som visserligen ändrar på den sammansatta matrisen, men inte på lösningen:

1) Multiplicera en rad med en konstant $\neq 0$.
2) Addera en multipel av en rad till en annan rad.
3) Byta plats på två rader.

A: Lin. ekv. syst. — Sammansatt matris

Ex 1:
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 6x_3 = 18 \\ 5x_1 \qquad + 8x_3 = -16 \\ 3x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -3 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 6 & 18 \\ 5 & 0 & 8 & -16 \\ 3 & 2 & -10 & -3 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{nya rad } 1 = \frac{1}{(-2)} \cdot \text{rad } 1 \\ nr2 = r2 - 5 \cdot nr1 \\ nr3 = r3 - 3 \cdot nr1 \end{array}\right\}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -3 & -9 \\ 0 & \frac{5}{2} & 23 & 29 \\ 0 & \frac{7}{2} & -1 & 24 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} nr2 = \frac{1}{5/2} \cdot r2 \\ nr1 = r1 - (-\frac{1}{2}) \cdot nr2 \\ nr3 = r3 - \frac{7}{2} \cdot nr2 \end{array}\right\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{16}{5} \\ 0 & 1 & \frac{46}{5} & \frac{58}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{166}{5} & -\frac{83}{5} \end{array}\right)$$

$$\sim \left\{\begin{array}{l} nr3 = \frac{1}{(-166/5)} \cdot r3 \\ nr1 = r1 - \frac{8}{5} \cdot nr3 \\ nr2 = r2 - \frac{46}{5} \cdot nr3 \end{array}\right\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} x_1 = -4 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Märk, hur vi snyggar till en kolumn i taget. Vi fick en unik lösning och den går lätt att kontrollera via insättning.

Ex 2: $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 6 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 = -3 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -6 & 9 \\ 2 & -5 & 4 & 6 \\ -1 & 16 & -14 & -3 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} nr1 = \frac{1}{3}\cdot r1 \\ nr2 = r2 - 2\cdot nr1 \\ nr3 = r3 - (-1)\cdot nr1 \end{array}\right\} \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & 8 & 0 \\ 0 & 18 & -16 & 0 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} nr2 = \frac{1}{-9}\cdot r2 \\ nr1 = r1 - 2\cdot nr2 \\ nr3 = r3 - 18\cdot nr2 \end{array}\right\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{9} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi kan inte komma längre! Ekvationssystemet har oändligt många lösningar och dessa fås ur de två övre ekvationerna: $x_1 - \frac{2}{9}\cdot x_3 = 3$ och $x_2 - \frac{8}{9}\cdot x_3 = 0$, vilket kan skrivas som $x_1 = 3 + \frac{2}{9}\cdot x_3$, $x_2 = \frac{8}{9}\cdot x_3$, $x_3 \in \mathbb{R}$ valfri. Lösningarna ligger alla på en linje i $\mathbb{R}^3$ (x_1, x_2, x_3-rummet). På parameterform kan linjen t.ex. ges som $(x_1, x_2, x_3) = (3 + \frac{2}{9}t, \frac{8}{9}t, t)$.

Ex 3: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 20 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 20 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} nr1 = \frac{1}{1}\cdot r1 \\ nr2 = r2 - 4\cdot nr1 \\ nr3 = r3 - 6\cdot nr1 \end{array}\right\} \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & 9 & -24 \\ 0 & -5 & 9 & -22 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} nr2 = \frac{1}{-5}\cdot r2 \\ nr1 = r1 - 1\cdot nr2 \\ nr3 = r3 - (-5)\cdot nr2 \end{array}\right\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} & \frac{24}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Lösning saknas, ty sista ekvationen är $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 2$.

B:

Ex 4: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$ ∞ lösn., som bildar en linje.

$x_1 = -1$, $x_2 - \frac{1}{2}\cdot x_3 = \frac{5}{2} \Rightarrow x_1 = -1$, $x_2 = \frac{x_3 + 5}{2}$, $x_3 \in \mathbb{R}$ valfri.

Ex 5: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ -2 & -4 & 8 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ Lösning saknas, ty sista ekv. är $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = -1$.

C:

Ex 6: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 7 \\ 3 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{19}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{19}{5} \end{array}\right)$ Lösning saknas, ty sista ekvationen är $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 = -\frac{19}{5}$.

Ex 7: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 7 \\ 3 & -2 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{19}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 = \frac{19}{5} \\ x_2 = \frac{1}{5} \end{cases}$ Unik lösning

Ex 8: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \\ -1 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ∞ lösn., som bildar en linje. $x_1 = 4 - x_2$, $x_2 \in \mathbb{R}$ valfri.