X1) Genomför de geometriska beräkningarna i $\mathbb{R}^n$:

a) Bestäm längden hos vektorn $\bar{u} = (1, -1, 1, -1)$ i $\mathbb{R}^4$.

b) Dito för $\bar{v} = (1, 3, 4, -5, 7)$ i $\mathbb{R}^5$.

c) Dito för $\bar{w} = (1, 2, 3, \ldots, 23, 24)$ i $\mathbb{R}^{24}$.

d) Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\bar{u} = (-1, 0, 2, 3, -6)$ och $\bar{v} = (1, 3, 4, -5, 7)$ i $\mathbb{R}^5$.

e) Dito för $(1, -2, 2, 0)$ och $(1, 1, 5, 3)$ i $\mathbb{R}^4$.

X2) Visa att följande vektorer spänner resp. vektorrum.

a) $\{(0,0,0,1), (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1)\}$; $\mathbb{R}^4$

b) $\{(-1,2,4), (-5,2,-2), (2,0,3), (1,2,3)\}$; $\mathbb{R}^3$

c) $\{p_1(x) = x+2,\ p_2(x) = 2x+1\}$; $P_1 = \{\text{polynom av grad} \le 1\}$

X3) Förklara varför följande vektorer inte spänner vektorrummet:

a) $\{(-3,1,0), (1,1,1), (0,0,0), (-1,7,5)\}$; $\mathbb{R}^3$

b) $\{(1,3,2,2), (5,7,1,0), (-1,-2,-4,3)\}$; $\mathbb{R}^4$

c) $\{p_1(x) = x^2 - 2x + 1,\ p_2(x) = 3x^2 - x - 2,\ p_3(x) = x^2 + 2x - 3\}$; P_2

X4) Visa att följande mängder av vektorer är linjärt oberoende:

a) $\{(1,1,0,0), (1,-1,0,0), (0,0,-2,2), (0,0,1,1)\}$

b) $\{(2,-2,0,4), (-1,2,1,-2), (1,1,2,2)\}$

X5) Förklara varför följande mängder är linjärt beroende:

a) $\{(2,3,0), (1,-2,4), (1,1,0), (1,1,1)\}$

b) $\{(1,-3,0,2,1), (-2,6,0,-4,-2)\}$

c) $\{(1,2,-1), (1,0,1), (3,-2,5)\}$

d) $\{(1,0,0), (0,0,0), (0,0,1)\}$

X6) Visa att vektorerna bildar en bas för vektorrummet:

a) $\{(0,0,0,1), (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1)\}$; $\mathbb{R}^4$

b) $\{(-3,1,0), (1,1,0), (-1,7,5)\}$; $\mathbb{R}^3$

X7) Förklara varför vektorerna inte bildar en bas:

a) $\{(-1,2,4), (-5,2,-2), (2,0,3), (1,2,3)\}$; $\mathbb{R}^3$

b) $\{(1,2,-1), (1,0,1), (3,-2,5)\}$; $\mathbb{R}^3$

c) $\{(1,2,-1), (1,0,1)\}$; $\mathbb{R}^3$

d) $\{(1,0), (0,0), (0,1)\}$; $\mathbb{R}^2$

Invertering av en 4×4-matris mha Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = A \quad \text{skall inverteras.}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{nya rad } 1 = \tfrac{1}{2}\cdot \text{rad } 1 \\ \text{nr}2 = r2 - (-4)\cdot \text{nr}1 \\ \text{nr}3 = r3 - 1\cdot \text{nr}1 \\ \text{nr}4 = r4 - 1\cdot \text{nr}1 \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1/2 & -1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & -5/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{nr}2 = r3 \\ \text{nr}3 = r2 \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1/2 & -1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & -5/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{nr}2 = \frac{1}{-1/2}\cdot r2 \\ \text{nr}1 = r1 - \tfrac{1}{2}\cdot \text{nr}2 \\ \text{nr}3 = r3 - 0\cdot \text{nr}2 \\ \text{nr}4 = r4 - \tfrac{1}{2}\cdot \text{nr}2 \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{nr}3 = \frac{1}{-1}\cdot r3 \\ \text{nr}1 = r1 - (-2)\cdot \text{nr}3 \\ \text{nr}2 = r2 - 2\cdot \text{nr}3 \\ \text{nr}4 = r4 - 0\cdot \text{nr}3 \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -6 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 5 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{nr}4 = \frac{1}{-3}\cdot r4 \\ \text{nr}1 = r1 - (-6)\cdot \text{nr}4 \\ \text{nr}2 = r2 - 7\cdot \text{nr}4 \\ \text{nr}3 = r3 - (-3)\cdot \text{nr}4 \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8/3 & 2 & 1/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/3 & -1/3 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & -2 \\ 8/3 & 2 & 1/3 & 7/3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1/3 & 0 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Kontroll: $A^{-1}A = I$, $AA^{-1} = I$.