Gk1 i matematik, supplement 1/05 Metsalo

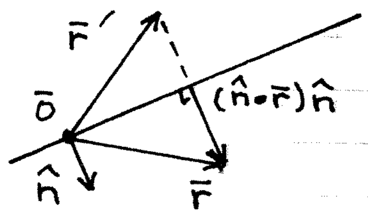
På insidan av detta blad finns några extra uppgifter för att göra somliga av alla de nya begreppen mer bekanta. Attackera dem gärna och glöm inte mottagningstiderna. Likaså finns ett exempel på invertering av en 4×4-matris mha. Gauss-Jordan på insidan. Nedan och på baksidan beskrivs vissa enkla manipulationer av rummet ($\mathbb{R}^3$), som kan beskrivas mha. matriser och vektorer. Läs kap. 8.1-3 i Kreyszig om planet $\mathbb{R}^2$, rummet $\mathbb{R}^3$, skalärprodukten samt vektorprodukten för att friska upp minnet.

Manipulationer av $\mathbb{R}^3$ (bestående av kolumnvektorer $\bar{r}$) mha. vektorer och matriser:

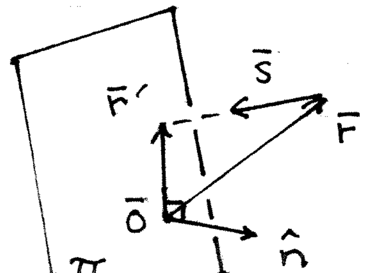
1) Translation med vektorn $\bar{a}$: $\bar{r} \to \bar{r} + \bar{a}$ (vektoradd.)

2) Skalning med faktorn λ: $\bar{r} \to \lambda\bar{r}$ (mult. m. skalär)

3) Spegling i (hyper-)plan med enhetsnormalen $\hat{n}$ genom origo:
$\bar{r} \to \bar{r}' = \bar{r} - 2(\hat{n}\cdot\bar{r})\hat{n} =$
$= (I - 2\hat{n}\hat{n}^T)\bar{r} = H\bar{r}$ (matrismult.)



4) Parallellprojektion på planet Π med enhetsnormalen $\hat{n}$ genom origo i riktningen $\bar{s}$ ($\hat{n}\cdot\bar{s} \neq 0$):
$\bar{r} \to \bar{r}' = \bar{r} + \alpha\bar{s}$, där
$\alpha = -(\hat{n}\cdot\bar{r})/(\hat{n}\cdot\bar{s}) = -\frac{\hat{n}^T\bar{r}}{\hat{n}^T\bar{s}}$,
så $\bar{r}' = \bar{r} - \frac{\hat{n}^T\bar{r}}{\hat{n}^T\bar{s}}\cdot\bar{s} = \bar{r} - \frac{1}{\hat{n}^T\bar{s}}\cdot\bar{s}\cdot\hat{n}^T\bar{r} =$
$= (I - \frac{1}{\hat{n}^T\bar{s}}\cdot\bar{s}\hat{n}^T)\bar{r} = P\bar{r}$
(åter en matrismult.)

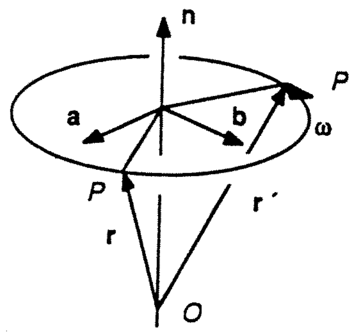


5a) Vridning vinkeln ω kring origo i $\mathbb{R}^2$ (dvs. planet):
$$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \bar{r}' = U\bar{r} = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
(åter en matrismult.)

5b) Vridning någon vinkel kring någon axel genom origo i $\mathbb{R}^3$ (dvs. rummet) ges på baksidan.

6) Kombinationer av dessa manipulationer.

5b) Nedan härleds vridningsmatrisen U för vridning av rummet $\mathbb{R}^3$ vinkeln ω kring en axel genom origo med (enhets-) riktningsvektorn $\hat{n}$. Texten är stulen ur Simo K. Kivelä: Algebra ja Geometria. Märk, att vektorprodukten kan ges m.h.a. matrismultiplikation:



$$\hat{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{n} \times \bar{r} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = N^{\times} \cdot \bar{r}.$$

Märk, att $N^{\times}$ är en anti-symmetrisk 3×3-matris.
Vi har $\bar{r} \to \bar{r}' = U\bar{r}$ (åter en matrismult.).

Olkoon $\mathbf{n}$ kiertoakselin suuntavektori ($|\mathbf{n}| = 1$) ja olkoon ω kiertokulma; näiden suunnat on valittava siten, että jos oikeakätistä ruuvia kierretään kiertokulman positiiviseen suuntaan, se alkaa edetä vektorin $\mathbf{n}$ suuntaan. Olkoot $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ kaksi yksikkövektoria, jotka ovat kohtisuorassa vektoria $\mathbf{n}$ vastaan siten, että $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n}\}$ on ortonormeerattu oikeakätinen kanta. Tällöin on erityisesti $\mathbf{n} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ ja $\mathbf{n} \times \mathbf{b} = -\mathbf{a}$.

Argumenttipisteelle $P \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r} \mathrel{\widehat{=}} x$ saadaan nyt esitys

$$\mathbf{r} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \rho(\cos\varphi \mathbf{a} + \sin\varphi \mathbf{b}),$$

missä ρ on pisteen kohtisuora etäisyys akselista. Tällöin on $\mathbf{n} \times \mathbf{r} = \rho(\cos\varphi\, \mathbf{b} - \sin\varphi\, \mathbf{a})$. Kuvapiste $P' \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}' \mathrel{\widehat{=}} x'$ saadaan kiertämällä vektorin $\mathbf{r}$ jälkimmäistä komponenttia kulman ω verran:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \rho[\cos(\varphi + \omega)\mathbf{a} + \sin(\varphi + \omega)\mathbf{b}] \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \cos\omega\, [\rho(\cos\varphi \mathbf{a} + \sin\varphi \mathbf{b})] + \sin\omega\, [\rho(-\sin\varphi \mathbf{a} + \cos\varphi \mathbf{b})] \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \cos\omega\, [\mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}] + \sin\omega\, [\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \end{aligned}$$

eli koordinaattimuodossa

$$\begin{aligned} x' &= (n^{\mathrm{T}} x)n + \cos\omega\, [x - (n^{\mathrm{T}} x)n] + \sin\omega\, [N^{\times} x] \\ &= [nn^{\mathrm{T}} + (\cos\omega)(I - nn^{\mathrm{T}}) + (\sin\omega)N^{\times}]x, \end{aligned}$$

missä $N^{\times}$ on ristitulon esitysmatriisi: $\mathbf{n} \times \mathbf{r} \mathrel{\widehat{=}} N^{\times} x$.

Kiertokuvauksen matriisi on siis

$$U = nn^{\mathrm{T}} + (\cos\omega)(I - nn^{\mathrm{T}}) + (\sin\omega)N^{\times}.$$