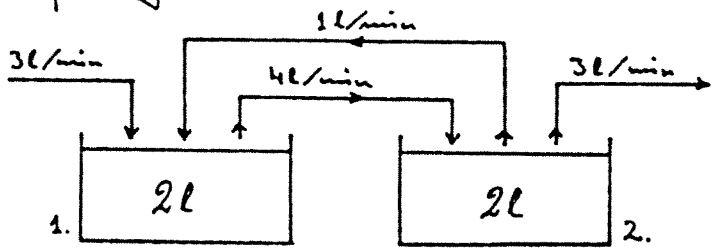
Tillämpning av differential-ekvationer.



Vi har 2 bägare, vilka vardera innehåller 2l vatten. Vi pumpar in rent vatten i bägare 1, 3l/min. Från bägare 1 pumpar vi 4l/min till bägare 2 och från bägare 2 1l/min till bägare 1. Slutligen pumpar vi 3l/min från bägare 2 ut i slasken.
I början innehåller bägare 2 rent vatten, men i bägare 1 har vi löst 20g salt. När kommer bägare 2 att innehålla maximal mängd salt och hur mycket salt kommer det då att finnas där?

Klart är, att efter lång tid har all salt spolats ut ur systemet. Låt oss studera, vad som händer under ett kort tidsintervall Δt min. Låt $S_1(t)$ och $S_2(t)$ beteckna saltmängden (i gram) i bägare 1 resp. 2 vid tiden t (i min).

Bägare 1: salt in: $1\,l/\text{min} \cdot S_2(t)\,g/2l \cdot \Delta t$ min
salt ut: $4\,l/\text{min} \cdot S_1(t)\,g/2l \cdot \Delta t$ min
(dessa är bara approximationer, för saltmängderna $S_1(t)$ och $S_2(t)$ kommer ändra sig (lite) under (det korta) tidsintervallet Δt.)
Ändringen $\Delta S_1 \approx \frac{1}{2} \cdot S_2(t) \cdot \Delta t - 2 \cdot S_1(t) \cdot \Delta t$ (gram)
$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S_1}{\Delta t} = S_1'(t) = -2S_1(t) + \frac{1}{2} \cdot S_2(t)$

Bägare 2: salt in: $4\,l/\text{min} \cdot S_1(t)\,g/2l \cdot \Delta t$ min
salt ut: $4\,l/\text{min} \cdot S_2(t)\,g/2l \cdot \Delta t$ min
(dessa är också bara approximationer, men ju mindre Δt är, desto bättre är approximationerna.)
Ändringen $\Delta S_2 \approx 2S_1(t) \cdot \Delta t - 2S_2(t) \cdot \Delta t$ (gram)
$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S_2}{\Delta t} = S_2'(t) = 2S_1(t) - 2S_2(t)$

Vi har nu ett system av 2 diff. ekvationer av 1:a ordn:

$$\begin{cases} S_1'(t) = -2S_1(t) + \frac{1}{2}\cdot S_2(t) & \text{I} \\ S_2'(t) = 2S_1(t) - 2S_2(t) & \text{II} \end{cases}$$

$S_2(t) = 2S_1'(t) + 4S_1(t)$ enl. I. Derivera I:

$$S_1''(t) = -2S_1'(t) + \tfrac{1}{2}\cdot S_2'(t) = \{\text{II}\} = -2S_1'(t) + (S_1(t) - S_2(t)) =$$
$$= -2S_1'(t) + S_1(t) - 2S_1'(t) - 4S_1(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_1''(t) + 4S_1'(t) + 3S_1(t) = 0$$

Vi har en linjär, homogen diff. ekv av 2:a ordningen med konstanta koefficienter. Ansätt $S_1(t) = e^{rt}$:

$$S_1''(t) + 4S_1'(t) + 3S_1(t) = r^2e^{rt} + 4re^{rt} + 3e^{rt} = (r^2 + 4r + 3)e^{rt} = 0$$
$$\Rightarrow (r^2 + 4r + 3) = (r+1)(r+3) = 0 \Rightarrow r_1 = -1,\ r_2 = -3. \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_1(t) = A\cdot e^{-t} + B\cdot e^{-3t} \Rightarrow S_1'(t) = -Ae^{-t} - 3Be^{-3t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_2(t) = 2S_1'(t) + 4S_1(t) = 2Ae^{-t} - 2Be^{-3t}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1'(t) = -2S_1(t) + \frac{1}{2}\cdot S_2(t) \\ S_2'(t) = 2S_1(t) - 2S_2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S_1(t) = Ae^{-t} + Be^{-3t} \\ S_2(t) = 2Ae^{-t} - 2Be^{-3t} \end{array}\right.$$

Nu kan vi sätta in begynnelsevillkoren: $S_1(0) = 20$ och $S_2(0) = 0$ (gram) ger oss A och B.

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 20 \\ 2A - 2B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 10 \\ B = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S_1(t) = 10(e^{-t} + e^{-3t}) \\ S_2(t) = 20(e^{-t} - e^{-3t}) \end{array}\right.$$

(saltmängderna mäts i gram, tiden i minuter.)

När antar $S_2(t)$ sitt maximum? $S_2(0) = \lim_{t\to\infty} S_2(t) = 0$, så max antas då $t = T \in \,]0, \infty[$.

$$S_2'(t) = 20(-e^{-t} + 3e^{-3t}),\quad 0 = S_2'(T) = 20(-e^{-T} + 3e^{-3T}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3e^{-3T} = e^{-T} \Rightarrow 3 = e^{2T} \Rightarrow T = \tfrac{1}{2}\cdot \ln 3 \quad \text{(minuter)}.$$
$$S_2(T) = 20(e^{-T} - e^{-3T}) = 20(3^{-1/2} - 3^{-3/2}) = 20\cdot\tfrac{2}{3\sqrt{3}} \quad \text{(gram)}$$

Så bägare 2 kommer att innehålla maximal mängd salt efter $\underline{T = \frac{1}{2}\cdot \ln 3 \text{ minuter}}$ (≈ 33 sekunder), då den innehåller $\underline{S_2(T) = 40/3\sqrt{3}\ \text{g}}$ (≈ 7.7 g).

Ur problemet bildade vi ett system av 2 diff. ekv. av 1:a ordn. Dessa löste vi inha en diff. ekv. av 2:a ordn. Därefter fick vi $S_1(t)$ och $S_2(t)$ ur begynnelsevillkoren. Nu vet vi alltså saltmängderna för alla $t \geq 0$.