Gk1 i Matematik, hemtal för v49/05 Metsalo

Detta är sista hemtalsomgången. Deltentamen 3 äger rum to 15.12. kl. 13-16 och omfattar kap. 4.6 - 7.9 i Adams. Kap. 1 & 2 i Kreyszig är bra som bredvidläsning till Adams när det gäller 1:a ordningens ODE (kap. 2.10-11, 3.4 och 7.9) resp. 2:a ordningens ODE (kap. 3.7), men går mycket djupare än Adams!
Sluttentamen äger rum fr 13.1. kl. 16-20. På sluttentamen räknas hemtals- och datorövningspoängen inte längre till godo. Till sluttentamen måste man förhandsanmäla sig.

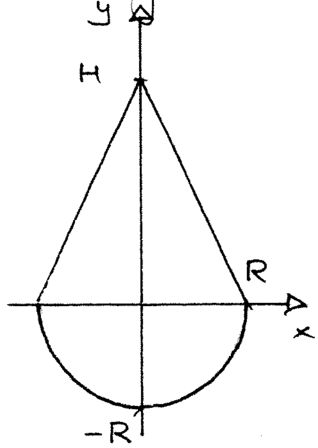
Fr: 1) Om en stång har (den kontinuerliga) längddensiteten $\delta(x) \geq 0\,kg/m$ för $x \in [a, b]$ ges dess massa av $m = \int_a^b \delta(x) \cdot dx$. Stångens tyngdpunkt eller masscentrum ges av $\bar{x} = \frac{1}{m} \cdot \int_a^b x \cdot \delta(x) \cdot dx$ och anger var stångens massa i genomsnitt finns. Storheten $J_c = \int_a^b (x-c)^2 \cdot \delta(x) \cdot dx$ kallas för stångens tröghetsmoment kring punkten c. Tröghetsradien $\sqrt{J_{\bar{x}}/m}$ ger ett mått på hur mycket massan i genomsnitt avviker från tyngdpunkten.
Längddensiteten hos en stång med längden L (enh. m) ges av $\delta(x) = \delta_0 \cdot \cos(\pi x / 2L)$ för $x \in [0m, L]$, där δ_0 har enheten kg/m.

a) Beräkna stångens massa.
b) Vilken punkt delar stången i två delar med samma massa?
c) Bestäm stångens tyngdpunkt (masscentrum) $\bar{x}$.
d) Bestäm stångens tröghetsmoment $J_{\bar{x}}$ kring tyngdpunkten samt stångens tröghetsradie.
e) Visa att tröghetsmomentet är minst just kring tyngdpunkten $\bar{x}$.
f) Visa att resultatet i del e) gäller för godtyckliga längddensitetsfunktioner $\delta(x) \geq 0\,kg/m$ och inte bara för denna speciella stång.

v.g. vänd.

2) Denna uppgift förekom som en av uppgifterna i sluttentamen i Gk2, men kan också lösas med enbart kunskaper från Gk1, fastän det är besvärligare:

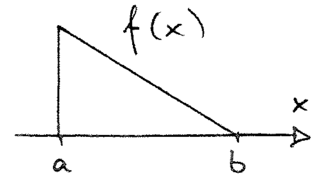
Svakar tänker svarva en liten kloss av homogent trävirke åt sin lilla systerdotter. Den består av ett halvklot med radien R och ovanpå det en kon med höjden H. (I figuren syns ett tvärsnitt genom konens symmetriaxel.) Hur stor får H maximalt vara i förhållande till R för att klossen inte skall välta, då den står på halvklotet?



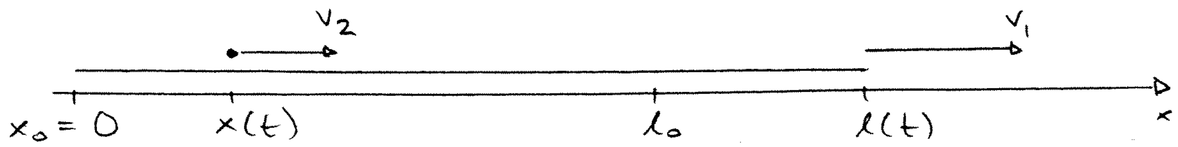
Det gäller att se till, att klossens tyngdpunkt är under halvklotets mittpunkt, dvs. att $\bar{y} < 0$ med koordinaterna som i figuren. Problemet är analogt med ex. 4, kap. 7.5, men det är naturligare att bryta upp integralen i två delar: $y \in [-R, 0]$ respektive $y \in [0, H]$.

3) Frekvensfunktionen $f(x)$ hos en stokastisk variabel $\underline{X} \in [a,b]$ satisfierar $f(x) \geq 0$ för $x \in [a,b]$, $f(x) = 0$ för $x \notin [a,b]$ och $\int_a^b f(x)dx = 1$. Fördelningsfunktionen $F(x)$ satisfierar $F(x) = 0$ för $x \leq a$, $F'(x) = f(x)$ för $a < x < b$ och $F(x) = 1$ för $x \geq b$. Den stokastiska variabelns medelvärde (eller väntevärde) ges av $\mu = \int_a^b x \cdot f(x)dx$ (jämför med tyngdpunkten hos en stång), dess varians av $\sigma^2 = \int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx$ och dess standardavvikelse av $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \left(\int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx\right)^{1/2}$ (jämför med tröghetsradien hos en stång).

Bestäm frekvensfunktionen $f(x)$, fördelningsfunktionen $F(x)$, medelvärdet μ och standardavvikelsen σ hos en stokastisk variabel $\underline{X}$ som antar värden i intervallet $[a,b]$ och som har en triangulär frekvensfunktion som i skissen ovan.



4)



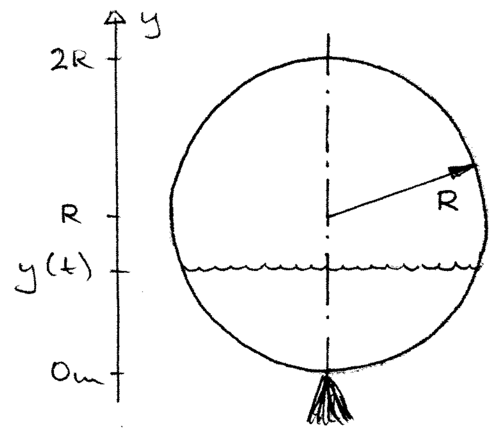
En gummisnodd med ursprungliga längden l_0 har vänster ända fäst i punkten $x_0 = 0$, men från och med tiden $t_0 = 0$ dras höger ända ut med den konstanta farten v_1, så snoddens längd vid tiden $t \geq t_0 = 0$ ges av $l(t) = l_0 + v_1 t$.

Låt oss anta att gummisnodden töjs lika mycket över hela sin längd och kan dras ut hur långt som helst utan att brista.

Vid tiden $t_0 = 0$ börjar en snigel, som vi för enkelhets skull antar vara punktformig krypa från vänster ända $x_0 = 0$ högerut med den konstanta farten v_2 i förhållande till sitt underlag, dvs. gummisnodden. Sätt upp differentialekvationen som bestämmer snigelns avstånd $x(t)$ från vänster ända vid tiden $t \geq t_0 = 0$ och lös den (den visar sig vara en 1:a ordningens linjär inhomogen ODE) för att få $x(t)$. Bestäm också tiden T det tar för snigeln att nå gummisnoddens högra ända, om den nu överhuvudtaget någonsin kommer fram dit (om t.ex. v_1 är mycket större än v_2).

(Kontroll: om $v_1 \gtrsim 0$, borde vi ha att $T \approx l_0/v_2$.)

Demo på baksidan.



Demo: Torricellis lag säger att $dV/dt = -A_0 \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{y(t)}$, då en vätska rinner ut genom ett hål med arean A_0 i botten på ett kärl (jmf. med demo fr v47).
Vi har en sfärisk cistern med radien R och med ett hål med arean A_0 i bottnet, fylld med vatten.

a) Vi bestämmer vätskedjupet, då vätskedjupet avtar långsammast.

b) Vi bestämmer hur lång tid det tar innan cisternen töms under inverkan av tyngdkraften, om vi bortser från friktion och turbulens vid uttömningen.

c) Om tiden tillåter, bestämmer vi också hur lång tid det tar innan cisternen töms till hälften.

Lycka till på deltentamen / sluttentamen.
Lämna in kursutvärderingarna till studiechefen.
Och om ni skall baka pepparkakor, utnyttja då det ni lärt er. Pröva t.ex. kurvor givna på parameterform som

$$(x(\theta), y(\theta)) = ((6-\sin^4(9\theta/2)) \cdot \cos\theta, (6-\sin^4(9\theta/2)) \cdot \sin\theta)$$

eller implicit som

$$(160x)^4 = \sqrt{(2+y)(12-y)^3} \cdot [176 - 13y + 64\arctan(10y) + 28\sin(2y) + 7\sin(4y)]^4$$

och inte bara $x^2 + y^2 = 1$.

God Jul och Gott Nytt År! Georg