Gk1 i Matematik, hemtal v48/05 Metsalo

Detta är näst sista hemtalsomgången. Sista föreläsningen äger rum to 8.12. och sista räkneövningen fr. 9.12.

Ti: 1) Beräkna följande anti-derivator (obestämda integraler):

a) $\int \frac{x^3\,dx}{x^3+8}$ b) $\int \frac{x^2-2}{(x^2+1)^2}\,dx$

(Kontrollera gärna svaren mha. t.ex. Mathematica!)

2) Undersök huruvida den generaliserade integralen konvergerar eller divergerar samt bestäm dess värde i händelse av konvergens:

a) $\int_2^\infty \frac{dx}{x^3+8}$ b) $\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^2}$

3) Om $f(x)=e^{\sin x}$ så är $|f(x)|\le e$, $|f'(x)|\le 1.5$, $|f''(x)|\le e$, $|f'''(x)|\le 4.5$ och $|f^{(4)}(x)|\le 4e$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

a) Beräkna en approximation av integralen $I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\sin x}\,dx$ mha. trapetsmetoden. Dela upp integrationsintervallet i fyra lika stora delintervall ($n=4$). Beräkna också en övre gräns för diskretionsfelet mha. olikheterna ovan.

b) Dito mha. Simpsons metod. (Nu är $2n=4$).

4a) 6.8.11 b) 6.8.13 (Gauss' kvadratur)

Här får vi ytterligare några enkla metoder för att approximera värdet hos en bestämd integral, då vi inte kan bestämma en anti-derivata till integranden:

Vi kan dela upp integrationsintervallet i delintervall och approximera integralen över varje delintervall på endera av dessa två sätt. Märk, att approximationen är exakt, om $f^{(4)}(x)\equiv 0$ resp. $f^{(6)}(x)\equiv 0$. Med hjälp av DKMS går det (förmodligen) att härleda en övre gräns för felet i approximationen och där ingår säkert $\max|f^{(4)}(x)|$ resp. $\max|f^{(6)}(x)|$. (Jag har dock inte gått igenom detaljerna, så detta är en gissning.)

v.g. vänd

Demo: Demo-uppgiften fr v46 gav att $e \approx$ $\approx 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \ldots + 1/n! + 2/(n+1)!$ med ett fel $< 1/(n+1)!$ till absolutbeloppet, så vi kan approximera talet e med rationella tal med godtyckligt litet fel. Nu skall vi approximera talet π med rationella tal med godtyckligt litet fel:
$\int_0^1 dx/(1+x^2) = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \pi = \int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$. Vi approximerar talet $\pi = \int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$ genom att använda Simpsons metod och $2n$ delintervall. Vi bestämmer också en övre gräns för felet i approximationen.

Fr: 1) 7.2.16/14 (uppl. 5/uppl. 4): ellipsoidens volym

2) Vi studerar öglan $27y^2 = x^2(9-x)$ från ti v47:

a) Låt öglan rotera kring x-axeln och beräkna volymen hos den droppformiga kroppen som uppstår.

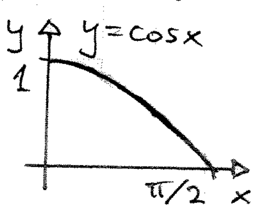
b) Låt öglan rotera kring y-axeln och beräkna volymen hos kroppen, som uppstår.

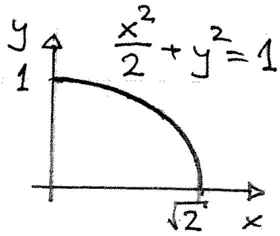
3a) Beräkna båglängden hos öglan $27y^2 = x^2(9-x)$.

b) Beräkna arean hos begränsningsytan till den droppformiga kroppen i uppgift 2a) ovan.

c) Beräkna arean hos begränsningsytan till kroppen i uppg. 2b) ovan.

4a) Använd variabelsubstitution till att visa att de två kurvorna till höger har samma längd.



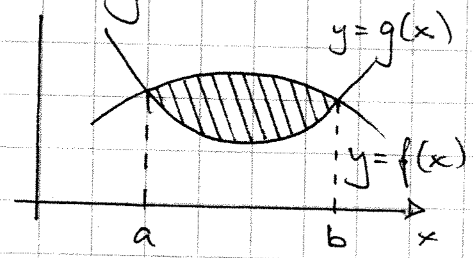


(forts. på nästa sida)

4b) Approximera denna längd med hjälp av trapetsmetoden eller Simpsons metod (välj själv) genom att dela upp integrationsintervallet i två lika långa delintervall.

c) Bestäm en övre gräns för felet i approximationen i b)-delen. (Felet beror på vilken metod vi valt: trapets eller Simpson.)

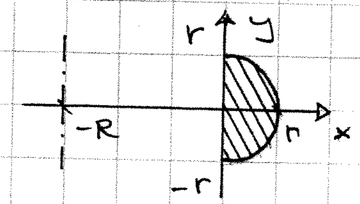
Demo: a) Pappus' 2:a sats (eller Guldins 2:a regel) säger att då ett plant område Ω roterar kring en axel L, som ligger i samma plan som Ω och som inte skär området, uppstår en kropp, vars volym V = (arean hos Ω) * (omkretsen hos cirkeln, längs vilken Ω:s tyngdpunkt rör sig under rotationen kring axeln L).



Vi visar satsen i fallet att Ω är det skuggade området till höger och axeln L är y-axeln.

b) Vi använder Pappus' sats och den kända formeln för klotets volym till att bestämma tyngdpunkten hos en halv cirkelskiva.

c) Då den skuggade halva cirkelskivan med radien r i figuren till höger roterar kring den vertikala linjen x = −R uppstår en vigselring. Vi använder resultatet från b)-delen och Pappus' sats för att beräkna dess volym.



På baksidan av detta blad finns mellanförhör nr. 3 från 2003 (och på baksidan av uppgiftsbladet till datorövning 3 finns mellanförhör nr. 3 från 2004).

Metsalo

Mat.-1.451 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1
Mellanförhör nr 3, 2003-12-11

Texta på varje papper
- studieperiod, datum
- studiekortets nr+bokst.. släktnamnet understreckat, alla förnamn
- utbildningsprogram (ARK,AUT,BIO,...,TLT,TUO,YHD)
- eventuella tidigare namn och utbildningsprogram
- komplettera med namnteckning

Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.

1. a) Bestäm parametern a så att gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-\sqrt{1+ax}}{x^2}$ blir ett ändligt tal b.

   b) Bestäm detta ändliga gränsvärde $b = \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-\sqrt{1+ax}}{x^2}$ för parametervärdet a från föregående deluppgift.

   c) Funktionen

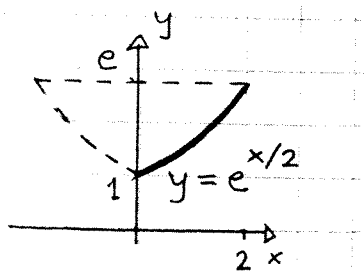
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x}-\sqrt{1+ax}}{x^2} & ,0 < |x| < \frac{1}{|a|} \\ b & ,x = 0 \end{cases}$$

   med a och b från de tidigare deluppgifterna är kontinuerlig i origo, eftersom dess gränsvärde är lika med dess funktionsvärde där. Bestäm $f'(0)$.

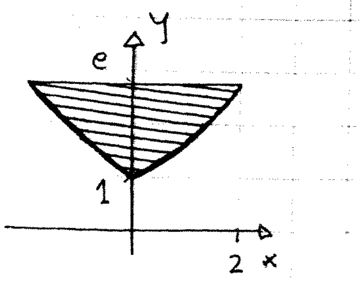
2. a) Då kurvan $y = e^{x/2}, 0 \le x \le 2$ roterar kring y-axeln uppstår en rotationssymmetrisk yta. Sätt upp integralen som ger denna ytas area.

   b) Approximera denna area genom att approximera integralen med hjälp av Simpsons metod, så att integrationsintervallet delas upp i fyra lika långa delintervall.

   (Själva arean $A = 18$, avrundat till närmaste heltal.)



3. Den rotationssymmetriska ytan i föregående uppgift kan användas som en behållare (typ martini-glas). Beräkna behållarens volym. (Svar: $V = 9$, avrundat till närmaste heltal.)



4. a) Bestäm lösningen $y(x)$ till den separabla differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{-x}}{y^2},$$

   som satisfierar begynnelse-villkoret $y(0) = 2$.

   b) Bestäm lösningen $y(x)$ till den linjära differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} + \cos(2x)y = 3\cos(2x),$$

   som satisfierar begynnelse-villkoret $y(0) = 1$.

Gott råd: I bägge deluppgifterna är det enkelt att kontrollera, att svarsfunktionen satisfierar såväl differential-ekvationen som begynnelse-villkoret.

Glöm inte att lämna in kursutvärderingarna till studiechefen. God Jul och Gott Nytt År!