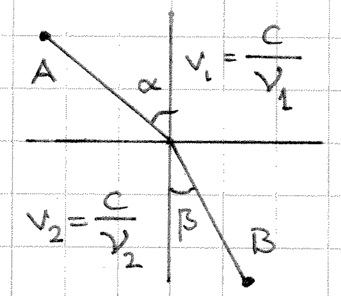
Gk1 i Matematik, hemtal v46/05 Mehsalo

Tisdagens räkneövning används åt nedanstående två demon. Fredagens hemtal finns på baksidan av detta blad. På insidan beskrivs vad vi kommer att ägna den närmaste tiden åt.

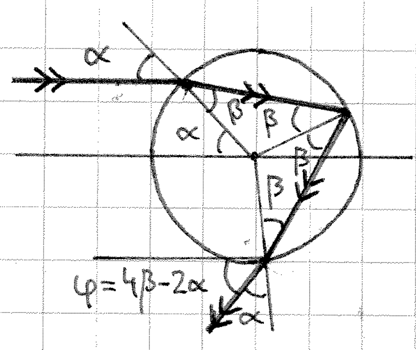
Ti: Demo 1a) Fermats princip säger att då ljus tar sig från en punkt till en annan går det längs den snabbaste vägen. Om vi har två media med ljushastigheterna v_1 resp. v_2 och ljuset skall gå från en punkt A i det ena mediet till en punkt B i det andra mediet så säger Snells lag att ljuset bryts så att $\sin\alpha / \sin\beta = v_1 / v_2$. Vi härleder Snells lag ur Fermats princip. $\nu_i = c/v_i$ kallas för mediets brytningsindex.



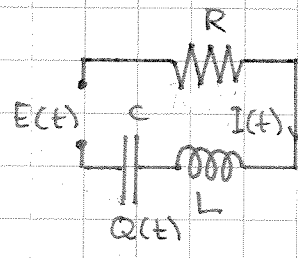
b) I Ekbom: Räknetabeller hittar vi vattnets brytningsindex:

Våglängd (nm):	760.8	686.7	656.7	589.3	527.0	486.1	430.8	396.8
Brytningsindex:	1.329	1.330	1.331	1.333	1.335	1.337	1.341	1.344

Vi använder den informationen och Snells lag ovan till att visa var, hur och kanske det intressantaste: varför man hittar regnbågen, då solen skiner lågt på himlen och det regnar. Verifiera sedan resultatet via observation, då tillfälle ges.



Demo 2a) Vi har en RLC-krets som till höger. Strömmen $I(t)$ och laddningen $Q(t)$ satisfierar $R\cdot I(t) + L\cdot I'(t) + \frac{1}{C}\cdot Q(t) = E(t)$, där $I(t) = Q'(t)$. Vi bestämmer $Q_H(t)$ och $I_H(t)$ (homogena lösningarna, dvs. då $E(t) \equiv 0V$) i fallet $0\Omega < R < 2\sqrt{L/C}$ (vilket ger dämpad svängning).



b) Nu lägger vi på spänningen $E(t) = E_0 \cdot \sin(\omega t)$, där $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Över resistorn får vi spänningsfallet $E_R = R\cdot I(t)$, över spolen $E_L = L\cdot I'(t)$ och över kondensatorn $E_C = \frac{1}{C}\cdot Q(t)$. Vi bestämmer $E_{R\max}$, $E_{L\max}$ och $E_{C\max}$ för den stationära lösningen (som inte avklingar med tiden).

Fr: 1) Bestäm hur många reella nollställen funktionen $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 4$ har samt använd Newtons metod (även känd som Newton-Raphsons metod) för att approximera dessa med två korrekta decimaler. Visa också hur vi vet att bägge decimalerna är korrekta.

2) Bestäm Maclaurin-polynomet (Taylor-polynomet utvecklat i punkten $a = 0$ av ordning (grad) $n = 3$ till funktionen $f(x) = \sqrt{\exp(x) + \sin(x)} = \sqrt{e^x + \sin(x)}$.

3) Bestäm gränsvärdena, om de existerar:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1-x}}{\cos(x) - \exp(\sin(x))}$, b) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\tan^2(x)) \cdot \ln(\arcsin(x))$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^3}\right)^{3x}$ d) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{3x}\right)^{x^3}$

4a) Bestäm parametern a så att gränsvärdet $\lim\limits_{x \to 0} (e^{3x} - \sqrt{1+ax})/x^2$ blir ett ändligt tal b.

b) Bestäm detta ändliga gränsvärde $b = \lim\limits_{x \to 0} (e^{3x} - \sqrt{1+ax})/x^2$ för detta parametervärde a.

c) Funktionen $f(x) = \begin{cases} (e^{3x} - \sqrt{1+ax})/x^2, & 0 < |x| < \frac{1}{|a|} \\ b, & x = 0 \end{cases}$

med a och b från ovan är kontinuerlig i origo. Bestäm $f'(0)$.

Demo: Maclaurin-polynomet $P_n(x)$ av funktionen $f(x) = e^x$ är $P_n(x) = 1 + x + x^2/2! + \ldots + x^n/n! = \sum_{k=0}^{n} x^k/k!$, vilket fås enkelt, eftersom $f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$. Felet i approximationen $f(x) \approx P_n(x)$ är då $E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot e^{X} \cdot (x - 0)^{n+1} = e^{X} \cdot x^{n+1}/(n+1)!$ där X är mellan 0 och x.

I synnerhet får vi att $e = f(1) \approx P_n(1) = \sum_{k=0}^{n} 1/k! = 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \ldots + 1/n!$ med ett fel $f(1) - P_n(1) = e^{X} \cdot 1/(n+1)! < \{2 < e < 3$ och X är mellan 0 och 1, så $e^{X} < 3^1 = 3\} < 3/(n+1)!$.

Detta gör att vi kan approximera talet e med ett godtyckligt litet fel: $\sum_{k=0}^{m} 1/k! < e < \sum_{k=0}^{n} 1/k! + 3/(n+1)!$ gäller för alla naturliga tal m och n. I kap. 9 får vi redskap för att visa att talet e som definierades mha. en area i kap. 3.3, är ett irrationellt tal.