Gk1 i Matematik, hemtal v44/05 Metsalo

Under v43 är det tentamensperiod, så då meddelas ingen undervisning i kursen. Torsdagen 3.11. har vi 2:a datorövningen, då vi använder Mathematica. Uppgifterna till datorövningen delas ut separat.

Ti: 1) Visa att $f(x) = x^3 - 2x - 5$ har (minst) ett nollställe i det öppna intervallet $]2,3[$ samt bestäm detta nollställe med ett fel < 0.01 mha. intervallhalveringsmetoden. (Vi söker alltså ett tal a sådant att $f(a)=0$, men nöjer oss med ett tal $b \ni |b-a| < 0.01$. Däremot räcker det inte om vi finner ett tal $c \ni |f(c)| < 0.01$, för då vet vi inte om c approx. nollstället a med ett fel < 0.01.) Förklara också hur vi kan veta att felet < 0.01.

2a) 1.5.37 Ur detta följer att om f och g är def. och kont. i $\mathbb{R}$, så är även $f \circ g$ (def. och) kont.

b) 1.5.38 (den s.k. klämsatsen)

3a) 1.5.34 b) 1.5.35 (Tillsammans med uppg. 1.5.33 (som utnyttjar uppg. 1.5.32) ger dessa satser resultatet i uppg. 1.5.36. Vi får bl.a. att produkten av kont. funktioner är kont. och att kvoten av kont. funktioner är kont. där den är definierad.)

4) $$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \cdot \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f är bekant från datorövningen. Visa (t.ex. mha. klämsatsen ovan) att f är kont. och differentierbar i hela $\mathbb{R}$ (även i $x=0$), men att derivatan f' är diskontinuerlig. Märk, att $f'(0) > 0$, men att det inte finns något intervall innehållande origo, där f är växande.

Demo: Vi visar satsen nedan, som ger anledningen till att lång division av polynom fungerar.

Sats: Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara två polynom, där g inte är nollfunktionen. Då finns det två polynom $q(x)$ och $r(x) \ni \text{grad}(r) < \text{grad}(g)$ och $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$. Vidare är polynomen q och r unika.

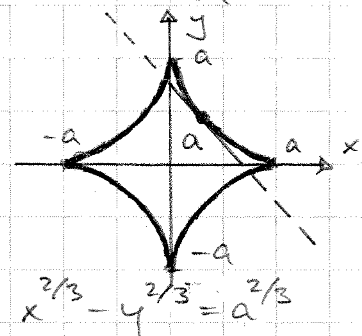
Fredagens hemtal på baksidan

Fr: 1a) Antag att f & g är tillräckligt många gånger deriverbara. Låt $h_1(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Då är $h_1'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. Bestäm $h_1''(x)$ och $h_1'''(x)$.

b) Låt $h_2(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Då är $h_2'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Bestäm $h_2''(x)$ och $h_2'''(x)$.

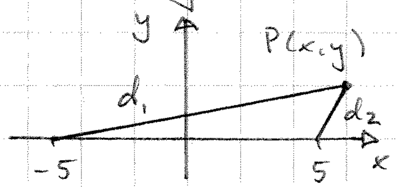
c) Antag att f är 3 gånger kontinuerligt deriverbar i en omgivning av origo och att $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 8$ och $f'''(0) = 17$. Låt $h_3(x) = \left(\frac{1}{f}\right)(x) = 1/f(x)$. Då är $h_3(0) = 1$. Beräkna $h_3'(0)$, $h_3''(0)$ och $h_3'''(0)$.

2) "Den fallande stegens kurva".



Asteroiden $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, som kan ges på parameterform som $(x, y) = (a \cdot \cos^3 t, a \cdot \sin^3 t)$, $t \in \mathbb{R}$, är bekant från datorövningen. Visa att den delen av tangentlinjen till asteroiden, som begränsas av koordinataxlarna, har längden a.

3) Lemniskatan $d_1 \cdot d_2 = 25$ är också bekant från datorövningen. Bestäm ekvationen för lemniskatans tangentlinje i punkten $(6, 2)$ (som ligger på lemniskatan, eftersom $d_1 \cdot d_2 = \sqrt{125} \cdot \sqrt{5}$).



4) Kurvan $d_1 \cdot d_2 = 30$ är också bekant från datorövningen. Bestäm de punkter på kurvan, där tangenten är horisontell och de punkter, där tangenten är vertikal.

Demo: Ekvationen $xy^3 - x^3y = 6$ ger en kurva, som går genom punkten $(1, 2)$. Ekvationen bestämmer implicit en funktion $f(x)$ i en omgivning av punkten $x = 1$ sådan att $f(1) = 2$ och att kurvan lokalt är $y = f(x)$, dvs. grafen av f i en omgivning av punkten $(1, 2)$. Vi bestämmer $f'(1)$, $f''(1)$ och $f'''(1)$ samt undersöker kurvans symmetriegenskaper.