Gk1 : Matematik, hemtal v42/05 Metsalo

Tisdagens räkneövning används åt nedanstående demo, som ger en ny binär operation i $\mathbb{R}^3$ vid sidan av additionen och vektorprodukten. Då framgår också den djupa sanningen i Garfields påstående på baksidan. Fredagens hemtal är på insidan av detta blad.

Ti: Demo: Denna uppgift använder det mesta vi lärt oss hittills! Om man vrider en boll kring en axel genom mittpunkten ändras inte positionen hos bollens mittpunkt. Nu visar vi att också motsatsen gäller: Om man vrider en boll godtyckligt, så att mittpunktens position förblir oförändrad, är slutresultatet detsamma som om vridningen skett kring någon axel genom mittpunkten.

Enhetsvektorerna $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ bildar ett ortonormalt högersystem: ortogonalt: $\hat{e}_1 \perp \hat{e}_2 \perp \hat{e}_3 \perp \hat{e}_1$, normerat: $\|\hat{e}_1\| = \|\hat{e}_2\| = \|\hat{e}_3\| = 1$, högersystem: $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = +\hat{e}_3$ ($\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = -\hat{e}_3$ för vänstersystem). Om vi vrider dessa tre basvektorer (och därmed hela $\mathbb{R}^3$) kring någon axel genom origo, får vi tre nya vektorer $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$, vilka också bildar ett ortonormalt högersystem, som också är en bas för $\mathbb{R}^3$.

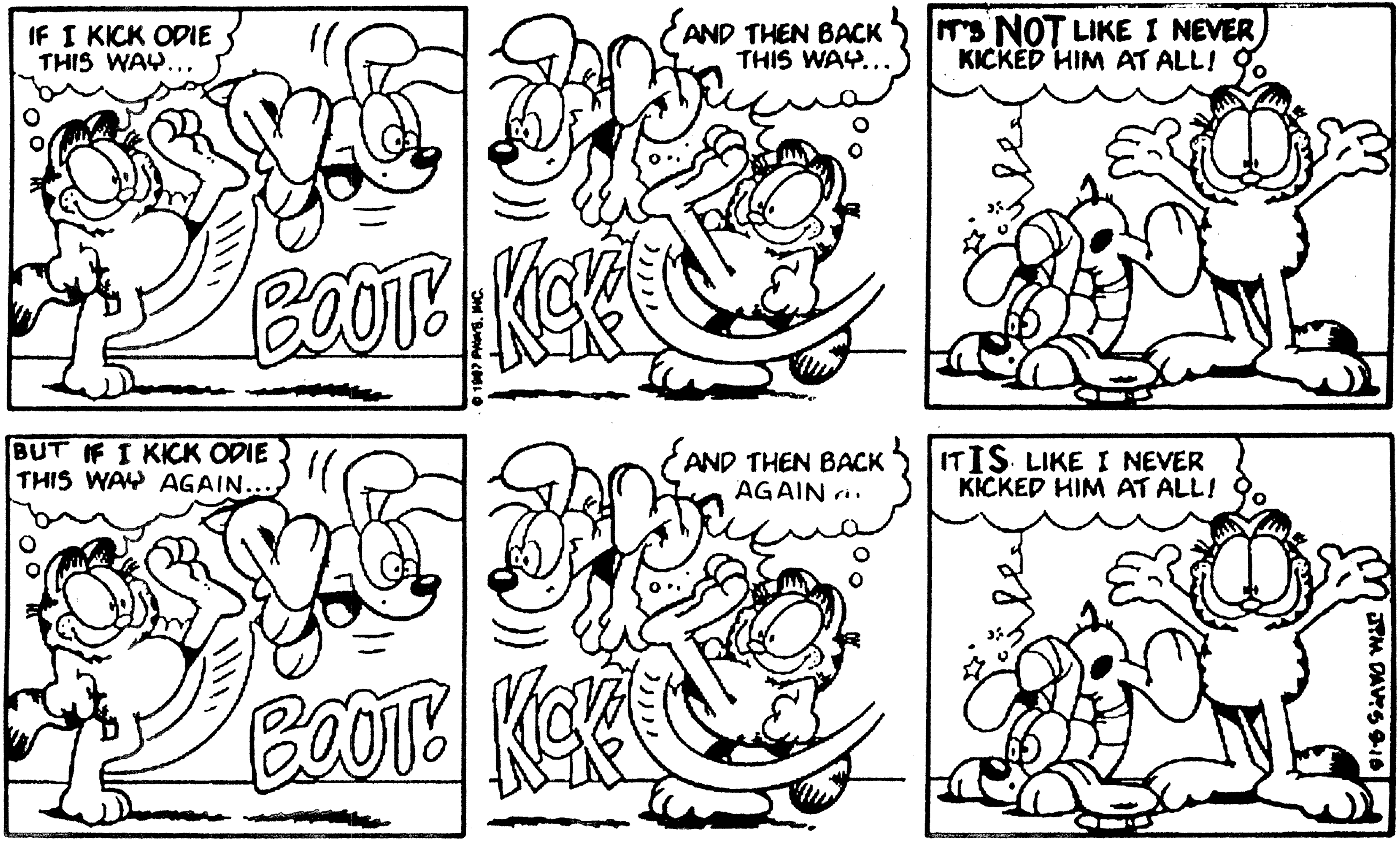
Nu gör vi tvärtom: Vi börjar med ett ortonormalt högersystem $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$ och visar att detta alltid kan fås genom att vrida standardbasen $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ kring någon lämplig axel genom origo i $\mathbb{R}^3$.

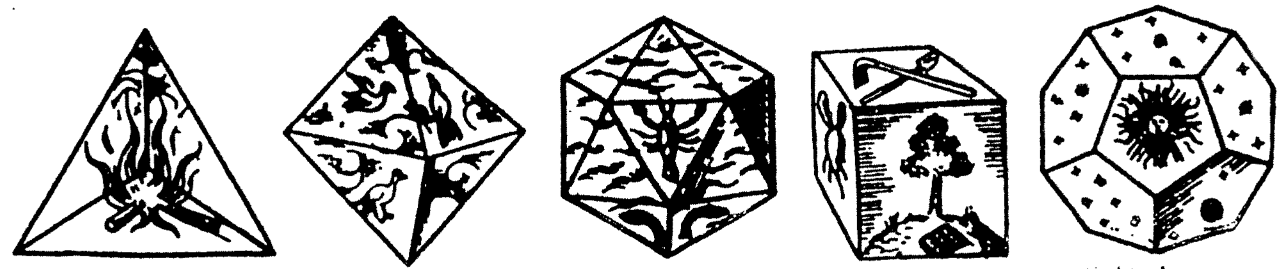
a) Att manipulera standardbasen $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ till den nya basen $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$ är en linjär operation i $\mathbb{R}^3$ som ges av matrismultiplikation med en 3×3-matris V vars kolumnvektorer är $\hat{v}_i$: Om $\hat{u} = a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 + c\hat{e}_3$ före manipulationen, är den $a\hat{v}_1 + b\hat{v}_2 + c\hat{v}_3$ efter manipulationen.

b) V har egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, där $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1$.

c) Om λ är ett egenvärde till V, så är även komplexkonjugaten $\bar{\lambda}$ och inversen $1/\lambda$ egenvärden till V.

d) Ett av V:s egenvärden måste vara 1, så en hel linje genom origo förblir oförändrad då vi manipulerar standardbasen till den nya basen. Manipulationen är ekvivalent med att vrida $\mathbb{R}^3$ kring denna axel.

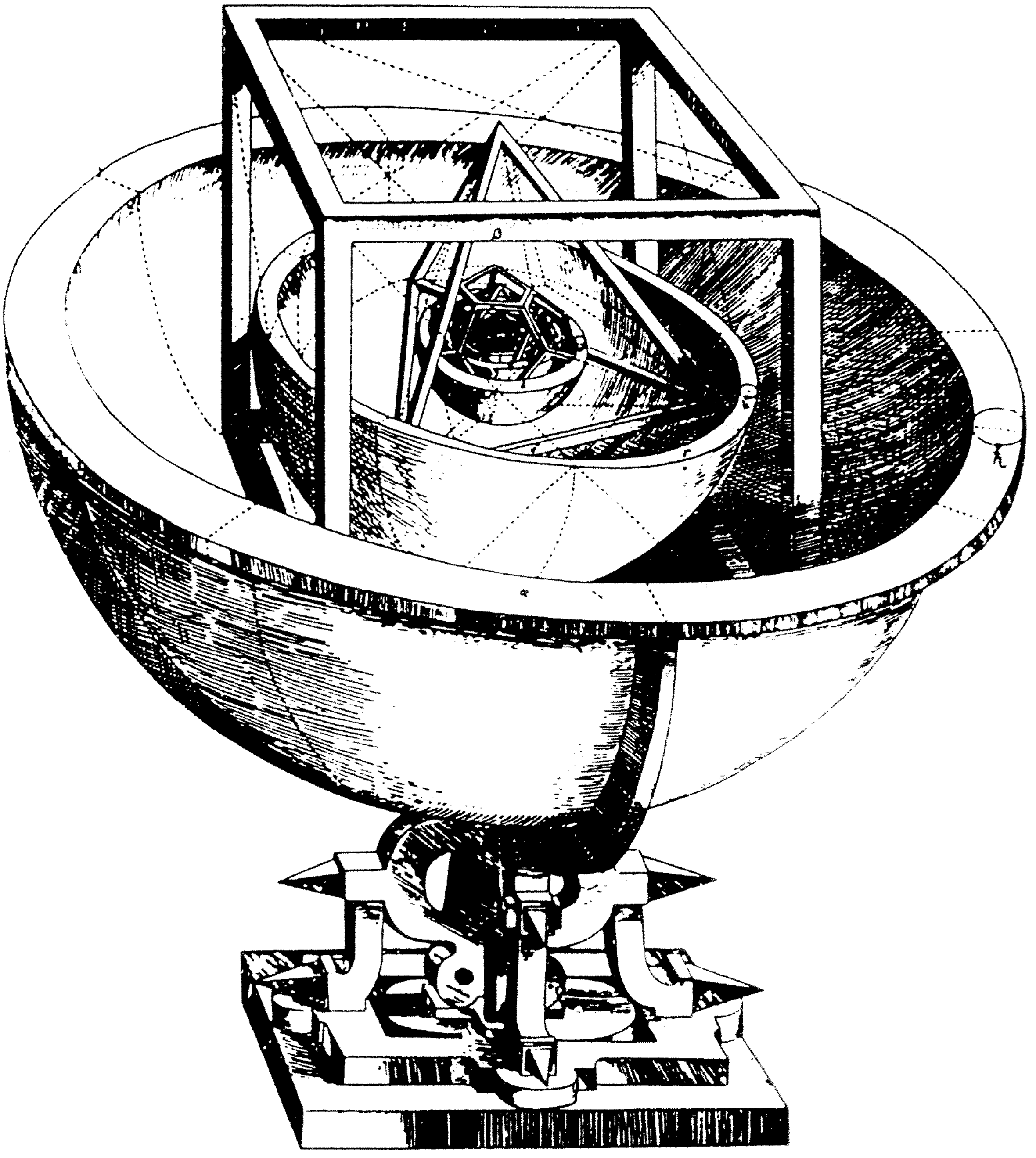

IF I KICK ODIE THIS WAY...
BOOT!
AND THEN BACK THIS WAY...
KICK!
IT'S NOT LIKE I NEVER KICKED HIM AT ALL!
BUT IF I KICK ODIE THIS WAY AGAIN...
BOOT!
AND THEN BACK AGAIN...
KICK!
IT IS LIKE I NEVER KICKED HIM AT ALL!



TETRAHEDRON Fire | OCTAHEDRON Air | ICOSAHEDRON Water | CUBE Earth | DODECAHEDRON The Universe

De platonska kropparna ovan ger vackra tillämpningar av gruppteorin. Tyvärr ledde de också kemin på villovägar ett par årtusenden med alkemi och guldmakeri som följd. Nedan finns en modell av solsystemet, som Kepler satte upp och som han senare förkastade, då mätningar visade att den inte stämde överens med verkligheten.

TABELLA III.
ORBIVM PLANETARVM DIMENSIONES, ET DISTANTIAS PER QVINQVE REGVLARIA CORPORA GEOMETRICA EXHIBENS.
ILLVSTRISS. PRINCIPI, AC DÑO, DÑO FRIDERICO, DVCI WIRTENBERGICO, ET TECCIO, COMITI MONTIS BELGARVM, ETC. CONSECRATA.



Fr: 1a) Låt $f(x)=3x-5$ och $g(x)=(x+5)/3$. Visa att $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=I(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Rita deras grafer. f och g säges vara varandras <u>invers-funktioner</u>. Mera om dessa i kap. 3.1 i Adams.

b) Visa att $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $f(x)=(1+2x)/(3-x)$ och $g:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $g(x)=(3x-1)/(x+2)$ är varandras inversfunktioner i bemärkelsen $f\circ g = I_{\mathbb{R}\setminus\{-2\}}$, $g\circ f = I_{\mathbb{R}\setminus\{3\}}$. Rita deras grafer.

2) Låt $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0$ vara ett polynom med heltalskoefficienter, dvs. $a_k\in\mathbb{Z}$. Visa att om $\alpha = p/q$ är ett rationellt nollställe till f (dvs. $\alpha\in\mathbb{Q}$, $f(\alpha)=0$) och heltalen p och q saknar gemensamma faktorer (dvs. bråket p/q är förkortat), så måste p vara en faktor i a_0 och q en faktor i a_n. (Märk dock att ett polynom med heltalskoefficienter inte behöver ha några rationella nollställen.)

Gott råd: multiplicera vänsterledet och högerledet i ekvationen $f(p/q)=0$ med heltalet q^n.

3a) 1.2.12 b) 1.2.25 c) 1.2.33 d) 1.2.41

4a) 1.3.3 b) 1.3.6 c) 1.3.24/26 d) 1.3.29/31

(upplaga 5/upplaga 4 i Adams)

Demo!
$$f(x)=\begin{cases} 1/q, & \text{om } x\in\mathbb{Q},\ x=p/q \text{ förkortat} \\ 0, & \text{om } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Vi visar, att $\lim_{x\to a} f(x)=0$ för $\forall a\in\mathbb{R}$, så f är kontinuerlig i alla irrationella punkter och diskontinuerlig i alla rationella punkter.