Gk1 i Matematik, hemtal v40/05 Metsalo

På insidan av detta blad finns fjolårets mellanförhör 1 (som omfattade bl.a. Kreyszig tom. kap. 6.7) samt en uppgift från fjolårets mellanförhör 2 (som omfattade bl.a. Kreyszig kap. 6.8–7.3). Likaså finns där uppgifterna från mellanförhör 1 år 2003 och 2002 (som bägge omfattade bl.a. Kreyszig kap. 6.1–7.3).

Ti: 1) Visa att speglingsmatrisen $H = I - 2\hat{n}\hat{n}^T$ i manipulation 3 i supplement 1 satisfierar
a) $H^T = H$ b) $H^2 = H \cdot H = I$

2) Låt A vara en inverterbar $n \times n$-matris. Visa att i så fall är även A:s transponatmatris inverterbar och att $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

3) En matris A kallas ortogonal, om A är inverterbar och $A^{-1} = A^T$. Visa att
a) A ortogonal $\Rightarrow \det(A) = \pm 1$
b) A, B $n \times n$, ortogonala $\Rightarrow AB$ $n \times n$, ortogonal
c) A ortogonal $\Rightarrow A^{-1}$ ortogonal
d) De ortogonala $n \times n$-matriserna bildar en grupp under operationen matrismultiplikation.

4) Mängden $\mathcal{C}$ består av reella 2×2-matriser på formen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Man ser lätt, att nollmatrisen O och identitetsmatrisen I tillhör $\mathcal{C}$ och att om A och B tillhör $\mathcal{C}$, så tillhör även $A+B$ och $-A$ mängden $\mathcal{C}$.
a) Visa att $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow AB \in \mathcal{C}$
b) Visa att $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow AB = BA$
c) Visa att $A \in \mathcal{C}$ $A \neq O$ (nollmatrisen) $\Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{C}$
d) Visa att $\mathcal{C}$ bildar en kropp under de två operationerna addition av 2×2-matriser och multiplikation av 2×2-matriser.

Demo: Vi visar att vridmatrisen U i manipulation 5b) i supplement 1 är ortogonal (se uppg. 3).

Fredagens hemtal på baksidan

Fr: 1) För vilka värden på konstanten k kommer det linjära ekvationssystemet att sakna lösning?

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

(Gott råd: Tänk på vad koefficientmatrisens determinant berättar om ekv. systemets lösningar.)

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \\ 1 & 4 & 16 & 7 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

a) Beräkna $\det(A)$

b) Beräkna $\mathrm{inv}(A) = A^{-1}$

c) Lös det linjära ekv.systemet $A\bar{x} = \bar{b}$.

3) Låt A och B vara två matriser sådana att $A+B$ och AB bägge är definierade. Visa att om $A+B = AB$, så är $B+A = BA$.

4) Visa att följande resultat gäller i alla vektorrum (och inte bara i t.ex. vektorrummen $\mathbb{R}^n$):

a) $(-1)\bar{u} = -\bar{u}$ b) $\alpha\bar{0} = \bar{0}$ c) $\alpha\bar{u} = \bar{0} \Rightarrow \alpha = 0$ el. $\bar{u} = \bar{0}$.

Demo: Låt A vara en godtycklig $m \times n$-matris.

a) Vi visar att om $I + A^TA$ är inverterbar, så är $I - A(I+A^TA)^{-1}A^T$ inversmatrisen till $I + AA^T$, så i så fall är även $I + AA^T$ inverterbar.

b) Vi visar analogt att om $I + AA^T$ är inverterbar, så är även $I + A^TA$ inverterbar.

c) Vi visar att $I + AA^T$ (och därmed även $I + A^TA$) är inverterbar för varje $m \times n$-matris A.