Gk1 i Matematik, hemtal v38/05 Metsalo

På insidan av detta blad attackeras några linjära ekvationssystem mha. Gauss' elimination med bakåtsubstitution vid sidan av exemplen i kap. 6.3 i Kreyszig. Senare studerar vi också Gauss-Jordans metod för lösning av linjära ekvationssystem, som dock kräver mera (dator-)tid (kap. 6.7).

Ti: 1a) $b=c \Rightarrow a*b=a*c$ och $b*a=c*a$ gäller för halvgrupper. Visa att för grupper gäller även motsatsen, dvs. visa sats 4. Förklara ingående vilket axiom eller vilken sats används i varje steg.

b) $a=b \Rightarrow a^{-1}=b^{-1}$ gäller för grupper. Visa att även motsatsen gäller dvs. visa sats 5. Förklara åter ingående.

2) Låt $(M, *)$ vara en grupp sådan att $a^{-1}=a$, $\forall a \in M$, dvs. att $a*a=e$, $\forall a$. Visa att gruppen är kommutativ.

3a) Sats 8 används i beviset av sats 9. Visa sats 8.

b) Använd sats 8 till att visa sats 9.

4a) Visa att $1\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot 7+\ldots+(2n-1)\cdot(2n+1)=\frac{n}{3}\cdot(4n^2+6n-1)$ för $n=1,2,3,\ldots$

b) Visa att då $a\neq 1$, är $1+2a+3a^2+4a^3+\ldots+na^{n-1}=$
$=(1-(n+1)\cdot a^n+na^{n+1})/(1-a)^2$ för $n=1,2,3,\ldots$

Testuppgift: Använd exakt samma argument som i uppg. 4 ovan för att visa att $n=n^2$ för $n=0,1,2,\ldots$ Om detta lyckas, så har ni missförstått induktion.

Demo: Summan $f+g$, produkten $f\cdot g$ och sammansättningen $f\circ g$ av två funktioner f och g definieras via $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ resp. $(f\circ g)(x)=f(g(x))$. En funktion p på formen $p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$ kallas för ett polynom. Vi studerar mängden P av alla polynom under de tre binära operationerna addition, multiplikation resp. sammansättning av funktioner: Vilka av axiomen A0-4 är satisfierade i resp. fall och vilka är de resp. enhetsfunktionerna (om sådana existerar i mängden i fråga)? Är någon operation distributiv map. någon annan?

Fredagens hemtal på baksidan

Fr: 1a) Visa att $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$ och $\overline{(-z)}=-\overline{z}$ samt mha. detta att $\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_1-\overline{z}_2$.

b) Visa att $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$ och $\overline{(1/z)}=1/(\overline{z})$ samt mha. detta att $\overline{z_1/z_2}=\overline{z}_1/\overline{z}_2$

c) Visa mha. induktion att $\overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2\cdot\ldots\cdot\overline{z}_n$ för $n=1,2,3,\ldots$

2a) Visa att $z=i$ är ett nollställe till 3:e-gradspolynomet $p(z)=z^3+(-2-5i)z^2+(-10+10i)z+(8+6i)$!

b) Eftersom $z=i$ är ett nollställe till $p(z)$, kan $p(z)$ faktoriseras på formen $p(z)=(z-i)\cdot q(z)$, där $q(z)=az^2+bz+c$ är ett 2:a-gradspolynom. Bestäm $q(z)$.

c) Bestäm q:s nollställen på formen $z=x+iy$.

3) Låt $p(z)$ vara ett polynom med reella koefficienter, dvs. $p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$, där a_k är reella tal. Visa att om $z=\alpha+i\beta$ är ett nollställe till p, dvs. om $p(\alpha+i\beta)=0$, så är även $\overline{z}=\alpha-i\beta$ ett nollställe till p. Icke-reella nollställen till reella polynom kommer alltså i komplex-konjugerade par.

4) Låt $\Lambda=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ vara en mängd bestående av tre inte nödvändigtvis olika komplexa tal med egenskapen

a) $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=1$ och b) $\lambda\in\Lambda\Rightarrow\overline{\lambda}$ och $1/\lambda\in\Lambda$

(varvid λ, $\overline{\lambda}$ och $1/\lambda$ inte behöver vara olika).

Visa att det komplexa talet 1 måste tillhöra Λ.

Demo: Fritt efter E. A. Poe (tror jag det var):

Den gamle sjörövaren berättade på sin dödsbädd:

"Jag startade vid galgeken, gick raka vägen till stenröset, sedan lika långt åt höger och slog ned en påle i marken. Sedan återvände jag till galgeken, gick raka vägen till källan, sedan lika långt åt vänster och slog ned en ny påle. Jag grävde ned skatten mitt emellan pålarna och drog därefter ut dem ur marken."

När vi kom till ön hade vi inga svårigheter att finna stenröset och källan, men galgeken hade ruttnat bort, så vi kunde inte finna några spår efter den. I en uppenbarelse såg jag dock galgekens plats och sedan hittade vi skatten. Detta var min första uppenbarelse och skatten bevisar att mina uppenbarelser är sanna!