Gk1 i Matematik, demo-övn. ti v37/05 Mehtsalo

Vi börjar med att gå igenom diverse algebraiska grundbegrepp, som finns definierade på insidan av detta blad. Därefter lär vi oss induktionsbevis som även beskrivs i Adams på sid. 113, 5:e uppl. (sid. 111, 4:e uppl.). Sedan går vi över till Kreyszig och börjar med kap. 12.1–2 om komplexa tal. Friska upp minnet genom att också studera kap. P i Adams och kap. 8.1–3 i Kreyszig.

Ti: När vi studerar de algebraiska grundbegreppen, utgår vi bara från axiomen. Våra grupper, ringar osv. behöver inte ha det ringaste med tal att göra! Om vi t.ex. talar om 0 i en kommutativ grupp, avser vi alltså elementet med egenskapen som beskrivs i axiom A2, dvs. enhetselementet under (den kommutativa) operationen, inte nödvändigtvis talet 0.

1) $\mathcal{M} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ är mängden av ordnade par av reella tal, där 1:a talet är $\neq 0$. $\S$ är en binär operation på $\mathcal{M}$, som ges av $(a, b) \S (c, d) = (ac, ad + b)$. Vi visar att $(\mathcal{M}, \S)$ bildar en icke-kommutativ grupp.

2) Vi visar att grupper också kan definieras på ett till synes svagare sätt:

A0) $x, y \in \mathcal{M} \Rightarrow x * y \in \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ sluten under $*$)

A1) $(x * y) * z = x * (y * z)$ ($*$ associativ)

A2´) $\exists e \in \mathcal{M} \ni e * a = a, \forall a$ (e vänsterenhet)

A3´) $\forall a \in \mathcal{M} \; \exists a^{-1} \in \mathcal{M} \ni a^{-1} * a = e$ (a^{-1} vänsterinvers)

Vi visar att vänsterenheten är unik, att även vänsterinversen är unik, att vänsterinversen också är högerinvers (så den satisfierar axiom A3) och slutligen att vänsterenheten också är högerenhet (så den satisfierar axiom A2). Märk, att vi inte gör något antagande om att operationen är kommutativ (axiom A4).

Forts. på baksidan

3) Vi visar sats 6: $0 * a = a * 0 = 0$ i en ring.
Detta resultat är bekant från multiplikation av heltal, där multiplikationen kan tolkas som en form av upprepad addition. Men vi visar, att detta är en konsekvens av de egenskaper, som operationerna i en ring har enligt definitionen.

4) Vi visar sats 7 och dess följdsats. Vid multiplikation av heltal säger följdsatsen att $(-1)\cdot(-1) = 1$, vilket torde vara bekant från tidigare. Men nu visar vi, att detta är en konsekvens av definitionen av ringar med etta.

5) Vi visar att om $(\mathcal{M}, +, *)$ är en divisionsring, så är $(\mathcal{M} \setminus \{0\}, *)$ en grupp. Sats 6 ovan har en central plats i beviset.

Fredagens räkneövning är inställd pga. pluggintagning.