Ex: Svakar, hankeiten Pelle och Svatta köpte godis. Svakar köpte tre lakritsstänger och två kokosbollar för 12 mk, Pelle köpte tre slickepinnar en lakritsstång och en kokosboll för 13 mk och Svatta köpte en slickepinne, fem lakritsstänger och en kokosboll för 12 mk.
Vad kostade slickepinnen, lakritsstången resp. kokosbollen?

Lösn: s, l och k är priset i mark.

$$\begin{cases} \text{Svakar:} & 0s + 3l + 2k = 12 \text{ (mk)} \\ \text{Pelle:} & 3s + 1l + 1k = 13 \\ \text{Svatta:} & 1s + 5l + 1k = 12 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ l \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 5 & 1 & 12 \end{array}\right) \sim \{r1 \leftrightarrow r2\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 1 & 5 & 1 & 12 \end{array}\right) \sim \begin{Bmatrix} nr2 = r2 - \frac{0}{3} \cdot r1 \\ nr3 = r3 - \frac{1}{3} \cdot r1 \end{Bmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 14/3 & 2/3 & 23/3 \end{array}\right) \sim \left\{nr3 = r3 - \frac{14/3}{3} \cdot r2\right\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -22/9 & -11 \end{array}\right)$$

Nu är Gauss' elimination slutförd. Det nya, <u>men ekvivalenta</u> lin. ekv. systemet är

$$\begin{cases} 3s + 1l + 1k = 13 \\ 0s + 3l + 2k = 12 \\ 0s + 0l - \frac{22}{9}k = -11 \end{cases}$$

Bakåtsubstitution:

$k = (-11)/(-22/9) = 9/2 = 4.50$ (mk)

$l = (12 - 2k)/3 = \{k = 9/2\} = 1$ (mk)

$s = (13 - l - k)/3 = \{k = 9/2,\ l = 1\} = 5/2 = 2.50$ (mk)

Vi får alltså, att slickepinnen kostar <u>2.50 mk</u>, lakritsstången <u>1.00 mk</u> och kokosbollen <u>4.50 mk</u>.
Vi gör klokt i att kontrollera detta via <u>insättning</u> i det ursprungliga problemet.

$$\therefore \begin{pmatrix} s \\ l \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.50 \\ 1.00 \\ 4.50 \end{pmatrix} \text{ satisficerar } \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ l \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$$

<u>och andra lösningar finns inte.</u>

Ex: Svakar, Svatta, Pelle och teknologen Osquar köpte godis. Svakar köpte två chokladkakor, fem gräddkolor och tre lakritsstänger för 23 mk, Svatta köpte en chokladkaka, sju gräddkolor och en lakritsstång för 13 mk, Pelle köpte en chokladkaka och sexton gräddkolor för 16 mk och Osquar köpte fyra chokladkakor, en gräddkola och sju lakritstänger. Hur mycket kostade Osquars godis?
Vad kostade chokladkakan, gräddkolan resp. lakritsstången?

Lösn: c, g och l är priset i mark. Beteckna priset för Osquars godis med x.

$$\begin{cases} \text{Svakar:} & 2c + 5g + 3l = 23 \\ \text{Svatta:} & 1c + 7g + 1l = 13 \\ \text{Pelle:} & 1c + 16g + 0l = 16 \\ \text{Osquar:} & 4c + 1g + 7l = x \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 16 & 0 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ g \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 13 \\ 16 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 23 \\ 1 & 7 & 1 & 13 \\ 1 & 16 & 0 & 16 \\ 4 & 1 & 7 & x \end{array}\right) \sim \begin{cases} ur2 = r2 - \frac{1}{2}\cdot r1 \\ ur3 = r3 - \frac{1}{2}\cdot r1 \\ ur4 = r4 - \frac{4}{2}\cdot r1 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 23 \\ 0 & 9/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 27/2 & -3/2 & 9/2 \\ 0 & -9 & 1 & x-46 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{cases} ur3 = r3 - \frac{27/2}{9/2}\cdot r2 \\ ur4 = r4 - \frac{-9}{9/2}\cdot r2 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 23 \\ 0 & 9/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-43 \end{array}\right)$$

Gauss' elimination ger följande <u>ekvivalenta</u> system:

$$\begin{cases} 2c + 5g + 3l = 23 \\ 0c + \frac{9}{2}g - \frac{1}{2}l = \frac{3}{2} \\ 0c + 0g + 0l = 0 \\ 0c + 0g + 0l = x - 43 \end{cases}$$

Vi får att $x = 43$, för annars saknas lösning.
∴ Osquars godis kostade $\underline{\underline{43 \text{ mk}}}$.

Däremot kan vi inte bestämma c, g och l m.h.a bakåtsubstitution. Vi kan endast uttrycka c och g m.h.a l via bakåtsubstitution:

$$\begin{cases} g = \left(\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)l\right) / \frac{9}{2} = \underline{\frac{1}{3} + \frac{1}{9}l} \\ c = (23 - 5g - 3l)/2 = \left\{g = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}l\right\} = \underline{\frac{32}{3} - \frac{16}{9}l} \end{cases}$$

l kommer att vara en valfri parameter.
Problemets natur ger att c, g och $l \geq 0$.
Men vi får inga entydiga värden på c, g och l.