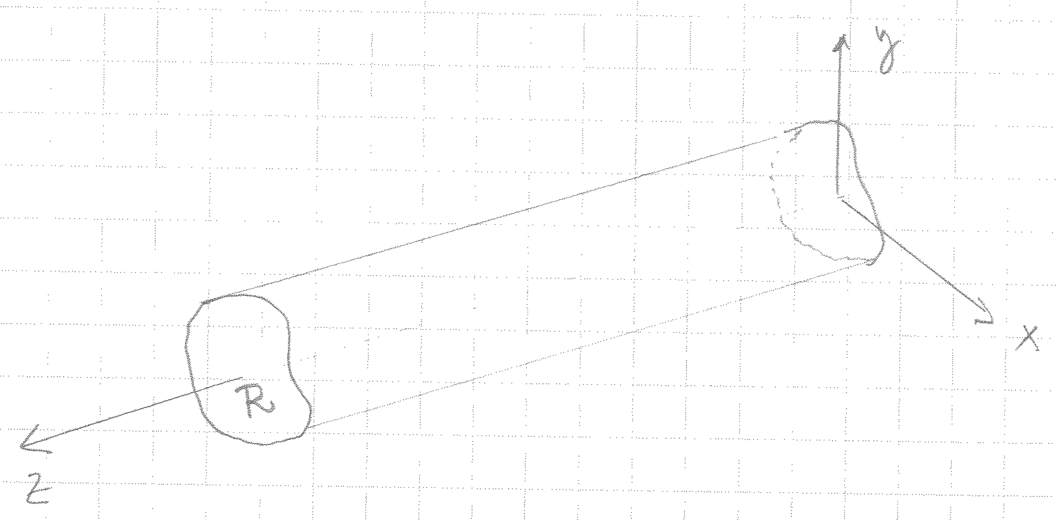
3.3. Sauvan vääntö



Jos poikkipinta on ympyrä niin siirtymäkentälle (u, v, w) pätee

$w = 0$ ja

$u = -y\theta$, $v = x\theta$,

missä θ on kiertymiskulma.

Olkoon $\alpha = \frac{d\theta}{dz}$.

Kun $u = v = 0$ kun $z = 0$ saadaan siis

$$u = -\alpha y z$$

$$v = \alpha x z$$

$$w = 0 .$$

Mielivaltaiselle poikkileikkaukselle R de Saint Venantin "Ansatz" on, että $w = k(x, y)$.

Osittaintuin käyttökelpoisempi olisi käyttää funktio $\phi(x,y)$ s.e.

$$w = K(x,y) = \alpha\,\phi(x,y).$$

Venymät ovat

$$\varepsilon_{xx} = 0, \quad \varepsilon_{xy} = 0, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(-\alpha y + \frac{\partial K}{\partial x}\right),$$

$$\varepsilon_{yy} = 0, \quad \varepsilon_{yx} = 0, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\alpha x + \frac{\partial K}{\partial y}\right),$$

$$\varepsilon_{zz} = 0.$$

Olkoon sauvan pituus L, jolloin kokonaispotentiaalienergia on

$$\Phi = \frac{1}{2}\int_0^L \int_R 2(\tau_{xz}\varepsilon_{xz} + \tau_{yz}\varepsilon_{yz})\,dA\,dz$$

$$- M\alpha L.$$

Leikkausjännitykselle pätee

$$\tau_{xz} = 2G\,\varepsilon_{xz}, \quad \tau_{yz} = 2G\,\varepsilon_{yz}$$

joten

$$\Phi = 2\int_0^L \int_R G(\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2)\,dA\,dz - ML\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L \int_R G\left[\left(-\alpha y + \frac{\partial K}{\partial x}\right)^2 + \left(\alpha x + \frac{\partial K}{\partial y}\right)^2\right] dA\,dz$$

$$- ML\alpha.$$

Varioidaan ensin α:n suhteen; variaatio $\delta\alpha$:

$$\int_0^L \int_R G\left[\left(-\alpha y + \frac{\partial K}{\partial x}\right)(-y\,\delta\alpha) + \left(\alpha x + \frac{\partial K}{\partial y}\right)(x\,\delta\alpha)\right] dA\, d$$

$$- ML\,\delta\alpha = 0$$ jokaiselle $\delta\alpha$.

Tästä seuraa momentille esityskaava:

$$M = G \int_R \left[x \frac{\partial K}{\partial y} - y \frac{\partial K}{\partial x} + \alpha(x^2+y^2)\right] dA.$$

Kun lisäksi sijoitetaan $K = \alpha\phi$ saadaan

$$\boxed{M = G\alpha \int_R \left[x \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial \phi}{\partial x} + (x^2+y^2)\right] dA}$$

Seuraavaksi varioidaan K:n suhteen, δK:

$$GL \int_R \left[\left(-\alpha y + \frac{\partial K}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}(\delta K)\right) + \left(\alpha x + \frac{\partial K}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}(\delta K)\right)\right] dA = 0$$

jokaiselle δK.

Osittaisintegrointi antaa

$$0 = G\alpha \int_R \left(-\frac{\partial^2 \kappa}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \kappa}{\partial y^2}\right)\delta\kappa \, dA$$

$$+ \int_{\partial R} \left[\left(-\alpha y + \frac{\partial \kappa}{\partial x}\right)\nu_x + \left(\alpha x + \frac{\partial \kappa}{\partial y}\right)\nu_y\right] ds .$$

Saamme siis Laplacen yhtälön

$$\frac{\partial^2 \kappa}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \kappa}{\partial y^2} = 0 \qquad R\text{:ssä},$$

Neumann reunaehdoilla

$$\left(\frac{\partial \kappa}{\partial x} - \alpha y\right)\nu_x + \left(\frac{\partial \kappa}{\partial y} + \alpha x\right)\nu_y = 0 \qquad \partial R\text{:llä}$$

Kun vielä sijoitamme $\kappa = \alpha\phi$ saadaan Laplace–Neumann tehtävä ϕ:lle:

$$\Delta \phi = 0 \qquad R\text{:ssä}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = y\nu_x - x\nu_y \qquad \partial R\text{:llä}.$$

Rityhäisyystä saadaan momentille

$$M = G\alpha \int_R \left[x\frac{\partial \phi}{\partial y} - y\frac{\partial \phi}{\partial x} + (x^2+y^2)\right] dA .$$

Komplementaari energian käyttö

Prandtl'n vääntöteoria

Jännityskomponenteista ainoastaan τ_{xz} ja $\tau_{yz} \neq 0$. Tasapainoyhtälöistä jää jäljelle

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 .$$

Jos leikkausjännitysvektoria merkitään $\vec{\tau} = \tau_{xz}\vec{i} + \tau_{yz}\vec{j}$, niin tasapainoyhtälö on

$$\nabla \cdot \vec{\tau} = 0 .$$

Vektorikenttä on siis lähteetön ja on olemassa (virta-) jännitysfunktio ψ siten, että

$$\tau_{xz} = G\alpha \frac{\partial \psi}{\partial y} , \quad \tau_{yz} = -G\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} ,$$

jolloin tasapainoyhtälö toteutuu. Reunaehtona on $\underline{\underline{\tau}}\, \underline{\nu} = \underline{0}$.

josta saadaan

$$\underline{\underline{\tau}}\,\underline{\nu} = G\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\nu_x - \frac{\partial\psi}{\partial x}\nu_y\right).$$

Reunan tangentti on $\underline{s} = (s_x, s_y)$ $= (-\nu_y, \nu_x)$ joten saadaan

$$G\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\nu_x - \frac{\partial\psi}{\partial x}\nu_y\right) = G\alpha\frac{\partial\psi}{\partial s} = 0.$$

Jännitysfunktio ψ on siis vakio reunalla.

Yhdesti yhtenäiselle alueelle voimme valita $\psi = 0$ reunalla ∂R.

(Jännityksissä esiityy vain ψ:n derivaattoja).

Komplementaarienergia on nyt

$$\Phi^* = \frac{1}{2G}\int_0^L\int_R (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)\,dA\,dz$$

$$- \int_R (\underline{\underline{\tau}}\,\underline{\nu})\cdot\underline{u}\,dA\,\Big|_{z=L}.$$

(Koska $\underline{u} = \underline{0}$ kun $z = 0$).

Toiselle termille pätee

$$\int_R (\underline{\underline{\tau}}\,\underline{\nu})\cdot\underline{u}\,dA\Big|_{z=L} = \alpha L\int_R (-\tau_{xz}y + \tau_{yz}x)\,dA,$$

koska $u = -\alpha y L$, $v = \alpha x L$ ja

$\underline{\nu} = \vec{k}$.

Sijoittamalla jännitysfunktion saamme

$$\Phi^* = \frac{1}{2}GL\alpha^2\int_R \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] dA$$

$$- GL\alpha^2\int_R \left(-y\frac{\partial\psi}{\partial y} - x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) dA.$$

Osittain integroimalla ja käyttämällä reunaehtoa $\psi|_{\partial R} = 0$ saamme

$$\int_R \left(-y\frac{\partial\psi}{\partial y} - x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) dA$$

$$= \int_R 2\psi\,dA - \int_{\partial R}(y\nu_y + x\nu_x)\psi\,ds$$

$$= \int_R 2\psi\,dA.$$

Energia on siis

$$\Phi^* = LG\alpha\int_R \left[\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] - 2\psi\right] dA$$

Vain viimeksi saadaan Dirichlet probleema ψ:lle

$$\begin{cases} \Delta \psi = -2 & R\text{:ssä}, \\ \psi \,|\, \partial R = 0 . \end{cases}$$

Jännitysfunktion ψ:n avulla saadaan momentin ja kiertymän välinen yhteys:

$$M = \int_R (-y\,\tau_{zx} + x\,\tau_{yz})\,dA$$

$$= -G\alpha \int_R \left(y\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dA$$

$$= G\alpha \int_R 2\psi \, dA$$

Siis

$$M = 2G\alpha \int_R \psi \, dA .$$

<u>Esimerkki.</u> Tarkistus ympyrälle.

$$\Omega = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \}.$$

$$\psi = \psi(r)$$

$$\Delta \psi = -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{r} \dfrac{d}{dr} \left(r \dfrac{d\psi}{dr} \right) = -2. \\ \psi(R) = 0. \end{cases}$$

sekä lisäehto $\psi(0) < \infty$.

Ratkaisu on

$$\psi(r) = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \quad . \quad \text{ja}$$

$$\int_\Omega \psi \, dA = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_0^R (R^2 - r^2) \, r \, dr$$

$$= \frac{\pi R^4}{4}$$

Saadaan siis tuttu kaava

$$M = G I_p \alpha \quad , \text{ missä}$$

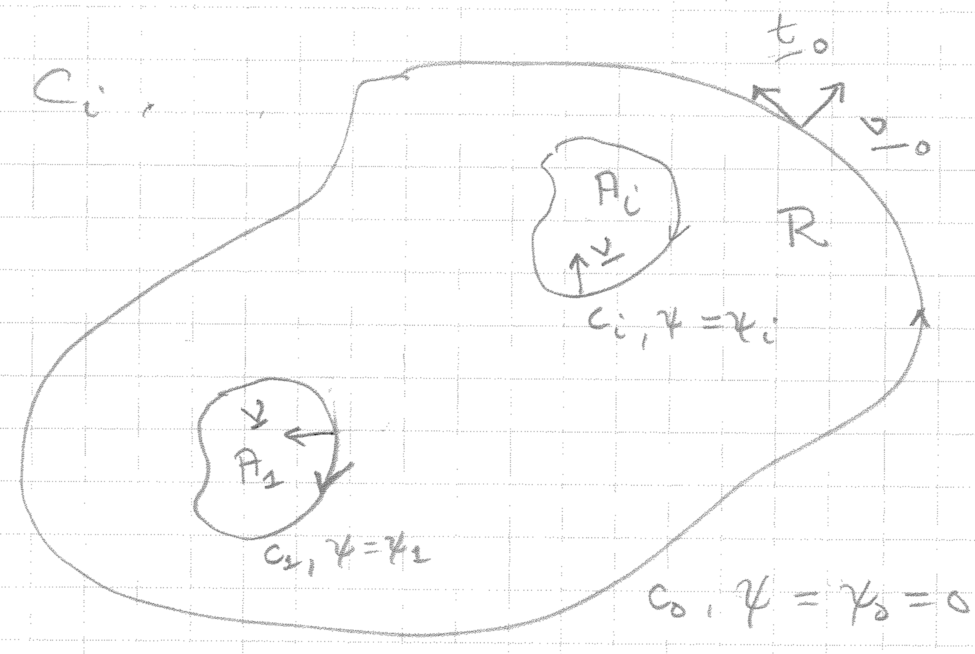
$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Prandtl'in teoria kun poikkipinnassa on "reikiä"!

(kts. esim. Sokolnikoff, The Mathematical Theory of Elasticity, Landau & Lifshitz, Theory of Elasticity).

Kun alue ei ole yhdesti yhtenäinen niin ainoastaan yhdeltä suljetulla reunan osalla ψ voidaan asettaa nollaksi. Muilla osilla $\psi|_{C_i} = \psi_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, ovat tuntemattomia.

$$\partial R = \bigcup_{i=0}^{n} C_i ,$$



Differentiaaliyhtälö & reunaehdot

$$\Delta \psi = -2 \qquad R\text{:ssä}$$

$$\psi|_{C_i} = \psi_i \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n .$$

$$\psi_0 = 0 .$$

Tarvitaan n lisä ehtoa ja näämä saadaan siitä että "warping" funktio ϕ on yksikäsitteinen, eli

$$\oint_{C_i} \nabla\phi \cdot d\underline{r} = 0 \quad , i=1,2,\dots,n.$$

Jännityksille meillä oli esitykset

$$\tau_{xz} = G\alpha\left(-y + \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) \quad , \tau_{yz} = G\alpha\left(x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$$

ja

$$\tau_{xz} = G\alpha \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad , \quad \tau_{yz} = -G\alpha \frac{\partial\psi}{\partial x} .$$

josta seuraa, että

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} + y \quad , \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} - x .$$

Olkoon $(x_i(t), y_i(t))$ käyrän C_i parametriesitys. Yhteensopivuus-ehto saa muodon

$$0 = \oint_{C_i} \nabla\phi \cdot d\underline{r} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial\phi}{\partial x} x_i'(t) + \frac{\partial\phi}{\partial y} y_i'(t)\right] dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + y\right) x' - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + x\right) y'\right] dt$$