Aalto-universitetet

MS-A0409 Grundkurs i diskret matematik Gripenberg
Övning 2
Vecka 38, 18–21.9.2013
Teori för dessa uppgifter finns också i Biggs: 5, 6, 14

I1. Om X och Y är mängder, $f : X \to Y$ en funktion, $A \subset X$ och $B \subset Y$ så är

$$f(A) = \{\, y \in Y : \exists x(x \in A \;\&\; f(x) = y)\,\} \quad \text{och} \quad f^{\leftarrow}(B) = \{\, x \in X : f(x) \in B\,\}.$$

Vad kan man säga om $f^{\leftarrow}(f(A))$ och $f(f^{\leftarrow}(B))$ och vad skall man anta om f för att $f^{\leftarrow}(f(A)) = A$ och vad för att $f(f^{\leftarrow}(B)) = B$. (Ofta används beteckningen f^{-1} istället för $f^{\leftarrow}$.)

Lösning: Om $x \in A$ så gäller (förstås) $f(x) \in f(A)$ och enligt definitionen gäller då också $x \in f^{\leftarrow}(f(A))$, dvs. $A \subset f^{\leftarrow}(f(A))$. På motsvarande sätt ser vi att att om $x \in f^{\leftarrow}(B)$ så gäller $f(x) \in B$ vilket betyder att $f(f^{\leftarrow}(B)) \subset B$.

Genom att välja $X = Y = \{1, 2\}$, $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ och definiera funktionen f med $f(1) = f(2) = 1$ ser vi att i detta fall gäller $A \neq f^{\leftarrow}(f(A)) = \{1, 2\}$ och $\{1\} = f(f^{\leftarrow}(B)) \neq B$.

Antag nu att f är en injektion och att $x \in f^{\leftarrow}(f(A))$. Eftersom $f(x) \in f(A)$ så finns det en punkt $x_* \in A$ så att $f(x_*) = f(x)$. Men eftersom f är en injektion gäller $x = x_*$ vilket betyder att $x \in A$, dvs. om f är en injektion så gäller $A = f^{\leftarrow}(f(A))$.

Antag sedan att f är en surjektion. Detta innebär att om $y \in B$ så finns det en punkt $x \in X$ så att $f(x) \in B$. Men då gäller $x \in f^{\leftarrow}(B)$ så att $y \in f(f^{\leftarrow}(B)$ och vi kan dra slutsatsen att $f(f^{\leftarrow}(B)) = B$ då f är en surjektion.

I2. En ö har formen av en liksidig triangel med en sidlängd som är mindre än 4 km. Sjutton personer har spolats upp på ön och nu vill var och en av dem bygga sig en hydda som ligger på över 1 km avstånd från varje annan hydda. Kan detta vara möjligt? Motivera ditt svar.

Lösning: Låt L vara sidlängden på ön (i km) så att $L < 4$. Nu kan vi dela in ön i 16 liksidiga trianglar (så att innerdelarna av trianglarna inte överlappar) med sidlängden $\frac{1}{4}L < 1$. Detta innebär att i varje sådan triangel finns det bara plats för en hydda om avståndet mellan hyddorna skall vara större än 1 km. Enlig lådprincipen går det därför inte att bygga 17 hyddor på ön så att de alla ligger på ett avstånd av minst 1 km från varandra.

I3. Låt $\text{Sur}(m, n)$ vara antalet surjektioner från en mängd A med m element till en mängd B med n element. Förklara hur och varför man kan uttrycka $\text{Sur}(m, n)$ med hjälp av $\text{Sur}(m - 1, n - 1)$ och $\text{Sur}(m - 1, n)$. Använd detta resultat för att räkna ut $\text{Sur}(4, 2)$. (Använd inte formeln för $\text{Sur}(m, n)$.)

Svar: 14

Lösning: Varje surjektion $f : A \to B$ kan väljas på följande sätt. Välj ett visst element $x \in A$. Det finns n olika sätt att välja $f(x) \in B$. När detta är gjort kan man antingen välja funktionen begränsad till $A \setminus \{x\}$ (en mängd med $m - 1$ element) så att den är en surjektion till B (en mängd med n element) eller så att den är en surjektion till mängden $B \setminus \{f(x)\}$. Dehär båda fallen utesluter varandra och därför är

$$\text{Sur}(m, n) = n \cdot (\text{Sur}(m-1, n) + \text{Sur}(m-1, n-1).$$

Genom att använda denna formel får vi

$$\begin{aligned}
\text{Sur}(4, 2) &= 2 \cdot (\text{Sur}(3, 2) + \text{Sur}(3, 1)), \\
\text{Sur}(3, 2) &= 2 \cdot (\text{Sur}(2, 2) + \text{Sur}(2, 1)), \\
\text{Sur}(2, 2) &= 2 \cdot (\text{Sur}(1, 2) + \text{Sur}(1, 1)),
\end{aligned}$$

Nu är $\text{Sur}(3, 1) = \text{Sur}(2, 1)\text{Sur}(1, 1) = 1$ och $\text{Sur}(1, 2) = 0$ så att vi får $\text{Sur}(2, 2) = 2$, $\text{Sur}(3, 2) = 2 \cdot (2 + 1) = 6$ och $\text{Sur}(4, 2) = 2 \cdot (6 + 1) = 14$.

I4. Om A och B är två $n \times n$-matriser är produkten $A \cdot B$ av matrisen med elementen

$$(A \cdot B)(i, j) = \sum_{k=1}^{n} A(i, k) \cdot B(k, j), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Hur många multiplikationer (av tal) måste man räkna om man använder definitionen som sådan.

Man kan också räkna produkten av två 2×2-matriser med 7 multiplikationer. Om man nu skall multiplicera två $2m \times 2m$ matriser kan man skriva dem i formen $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} S & T \\ U & V \end{bmatrix}$ där A, B, C, D, S, T, U och V är $m \times m$ matriser och för att räkna produkten av dem så räcker det att man räknar 7 produkter av $m \times m$ matriser.

Använd detta result för att bestämma ett tal a så att man med n^a multiplikationer (och ett stort antal additioner och subtraktioner) kan räkna produkten av två $n \times n$ matriser då $n = 2^p$ får något positivt heltal p.

Svar: ≈ 2.8074.

Lösning: Man skall räkna n^2 element och om varje element definieras som en summa av n produkter så man skall räkna sammanlagt n^3 produkter i det första fallet.

Vi kan visa med induktion att då $n = 2^p$ så räcker det att räkna högst 7^p multiplikationer för att rkna matrisprodukten.

Enligt anatagandet gäller detta då $p = 1$. Antag nu att det gäller också då $p = k$ och låt $n = 2^{k+1}$. Vi kan nu dela upp båda matriserna i 4 stycken $n^k \times n^k$-matriser. Vi skall nu räkna 7 produkter av sådana $n^k \times n^k$-matriser och antalet multiplikationer som behövs för detta blir enligt induktionsantagandet högst $7 \cdot 7^k = 7^{k+1}$. Nu följer påståendet från induktionsprincipen.

Vi kan också skriva

$$7^k = \left(2^{\log_2(7)}\right)^k = 2^{k \cdot \log_2(7)} = \left(2^k\right)^{\log_2(7)} = n^{\log_2(7)}$$

vilket betyder att $a \geq \log_2(7) \approx 2.8074$.

I5.

(a) Antag att X är en mängd ($\neq \emptyset$) och W en relation i X (dvs. en delmängd av $X \times X$) som är både symmetrisk och transitiv. Vad måste man ännu anta (utan att direkt anta att den är reflexiv, eller tex. transitiv) för att relationen också skall vara reflexiv?

(b) Antag att X är en mängd ($\neq \emptyset$) och $V_j \subset X$ för $j = 1, 2, \ldots, m$. Vilka villkor måste mängderna uppfylla (eller bara, räcker det att mängderna uppfyller) för att att relationen $\sim$ som man definierar med villkoret

$$a \sim b \leftrightarrow \exists j \in \{1, \ldots m\}(a \in V_j \;\&\; b \in V_j)$$

skall vara en ekvivalensrelation?

Lösning: (a) Om $[x, y] \in W$ så gäller $[y, x] \in W$ eftersom relationen är symmetrisk och då gäller $[x, x] \in W$ eftersom den är transitiv. Det villkor som måste vara uppfyllt blir därför att för varje $x \in X$ finns ett $y \in X$ så att $[x, y] \in W$. Detta behöver inte automatikst gälla för om $W = \emptyset$ så är W både symmetrisk och transitiv.

(b) Det är klart att relationen är symmetrisk oberoende av hur man valt mängderna V_j.

Eftersom en ekvivalensrelation är reflexiv ($x \sim x$ för alla $x \in X$) så måste $\cup_{j=1}^{m} V_j = X$.

En ekvivalensrelation är transitiv och det kommer $\sim$ säkert att vara om $V_i \cap V_j = \emptyset$ då $i \neq j$. Om detta inte är fallet måste man anta att om $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ så finns det för varje $x \in V_i$ och $y \in V_j$ ett index k så att $x, y \in V_k$ för eftersom det finns ett $z \in V_1 \cap V_j$ gäller $x \sim z$ och $z \sim y$ vilket betyder, om $\sim$ är transitiv, att $x \sim y$.

(Om nu $V_i \cap V_j$ med $i \neq j$ så skulle det vara förnuftigt att ersätta bäda mängderna med $V_i \cup V_j$, men det är en annan sak.)
