Aalto-universitetet

MS-A0409 Grundkurs i diskret matematik — Gripenberg

Övning 1

Vecka 37, 12–17.9.2013

Teori för dessa uppgifter finns också i Biggs: 1, 2, 3, 4.2, 4.3 och Rosen: 1, 3.2

Returnera lösningarna till I-uppgifterna senast 17.9.2013 kl. 16.30

Kom ihåg att skriva ditt namn och studentnummer!

I1. Antag att A och B är delmängder i mängden Ω. Är det sant att

$$B = \emptyset \quad \leftrightarrow \quad (A \cap B^c) \cup B = (A \cup B) \cap B^c$$

där $B^c = \Omega \setminus B$? Motivera ditt svar.
Ledning: Antag först att $B = \emptyset$ och kontrollera om mängderna på höger sida är lika (dvs. förenkla båda uttrycken). Om detta inte är fallet är påståendet inte sant och saken är klar. I annat fall skall du kontrollera vad som händer om $B \neq \emptyset$, och det räcker i detta fall att kolla huruvida ett element $x \in B$ hör till båda mängderna $(A \cap B^c) \cup B$ och $(A \cup B) \cap B^c$. (Kom ihåg att $P \leftrightarrow Q$ är sant om och endast om $P \to Q$ och $!P \to !Q$.)

I2. Visa med hjälp av induktion att

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \ldots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n}{3}(4n^2 + 6n - 1), \quad n \geq 1.$$

I3. Låt a och b vara två satser eller påstenden. Förklara varför satsen

$$(a \to b) \mid (b \to a)$$

är en tautologi, dvs. är sann oberoende av om a och b är sanna eller falska. Ge ett exempel på tolkningar av a och b så att man av påståendet "om a så b eller om b så a" ser att implikationen $\to$ inte alltid motsvarar vad man i dagligt tal avser då man säger "om .... så ....".

I4. Uttryck följande satser på svenska och avgör vilka som är sanna och vilka falska (utan desto mera motiveringar).

(a) $\forall x((x \in \mathbb{Z}) \to (x - 1 \in \mathbb{Z}))$
(b) $\forall y \in \mathbb{Z}(\exists x \in Z(y = x^2))$
(c) $(x \in \mathbb{R}) \to (x > 0 \to \exists y \in \mathbb{R}(y > 0 \,\&\, y < x))$.

Ledning: Här är $\mathbb{Z}$ mängden heltal och $\mathbb{R}$ mängden av reella tal.

I5. Ge ett exempel på en mängd med ett "första" element o, en "efterföljarfunktion" $S(x)$ definierad i denna mängd och likhet $==$ så att de två första av Peano's axiom är uppfyllda, dvs.

- $\forall x(\forall y((S(x) == S(y)) \to (x == y)))$
- $\forall x(!(S(x) == o))$

och så att dessutom gäller $\forall x(!(x == 0) \to (\exists y(x == S(y))))$ men induktionsaxiomet inte gäller.

Besvara Stack-uppgifterna (`stack3.aalto.fi/course/view.php?id=15`) senast 17.9.2013 kl. 16.30
