Aalto-universitetet

MS-A0409 Grundkurs i diskret matematik — Gripenberg

Övning 1

Vecka 37, 12–17.9.2013

Teori för dessa uppgifter finns också i Biggs: 1, 2, 3, 4.2, 4.3 och Rosen: 1, 3.2

**I1.** Antag att $A$ och $B$ är delmängder i mängden $\Omega$. Är det sant att

$$B = \emptyset \quad \leftrightarrow \quad (A \cap B^c) \cup B = (A \cup B) \cap B^c$$

där $B^c = \Omega \setminus B$? Motivera ditt svar.

*Ledning: Antag först att $B = \emptyset$ och kontrollera om mängderna på höger sida är lika (dvs. förenkla båda uttrycken). Om detta inte är fallet är påståendet inte sant och saken är klar. I annat fall skall du kontrollera vad som händer om $B \neq \emptyset$, och det räcker i detta fall att kolla huruvida ett element $x \in B$ hör till båda mängderna $(A \cap B^c) \cup B$ och $(A \cup B) \cap B^c$. (Kom ihåg att $P \leftrightarrow Q$ är sant om och endast om $P \to Q$ och $!P \to !Q$.)*

*Lösning:* Om $B = \emptyset$ så är $B^c = \Omega$ och eftersom $A \subset \Omega$ gäller

$$(A \cap B^c) \cup B = (A \cap \Omega) \cup \emptyset = A$$

och

$$(A \cup B) \cap B^c = (A \cup \emptyset) \cap \Omega = A \cap \Omega = A,$$

så att $(A \cap B^c) \cup B = (A \cup B) \cap B^c$.

Om $B \neq \emptyset$ så finns det ett element $x \in B$. Eftersom $x \in B$ så gäller $x \in (A \cap B^c) \cup B$ men $x \notin B^c$ så att $x \notin (A \cup B) \cap B^c$. Detta innebär att då $B \neq \emptyset$ så är $(A \cap B^c) \cup B \neq (A \cup B) \cap B^c$.

Således gäller påståendet.

---

**I2.** Visa med hjälp av induktion att

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \ldots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n}{3}(4n^2 + 6n - 1), \quad n \geq 1.$$

*Lösning:* Påståendet $P(n)$ är alltså att $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \ldots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n}{3}(4n^2 + 6n - 1)$ och $n_0 = 1$. Då $n = 1$ påstås alltså att $1 \cdot 3 = \frac{1}{3}(4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 - 1)$ vilket är detsamma som att $3 = \frac{9}{3}$ vilket stämmer. Om nu $P(k)$ är sant har vi $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \ldots + (2k-1)(2k+1) = \frac{k}{3}(4k^2 + 6k - 1)$ och då får vi

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \ldots + (2k-1)(2k+1) + (2(k+1)-1)(2(k+1)+1) \\
&\qquad = \frac{k}{3}(4k^2 + 6k - 1) + (2k+1)(2k+3).
\end{aligned}$$

Om vi startar från det vi vill visa att detta uttryck är får vi

$$\begin{aligned}
\frac{k+1}{3}((4(k+1)^2 + 6(k+1) - 1) &= \frac{k}{3}(4k^2 + 6k - 1) + \frac{1}{3}(4k^2 + 8k + 4 + 6k + 6 - 1) + \frac{k}{3}(8k + 4 + 6) \\
&= \frac{k}{3}(4k^2 + 6k - 1) + \frac{1}{3}(12k^2 + 24k + 9) = \frac{k}{3}(4k^2 + 6k - 1) + (4k^2 + 8k + 3) \\
&= \frac{k}{3}(4k^2 + 6k - 1) + (2k+1)(2k+3),
\end{aligned}$$

och vi ser att också $P(k+1)$ är sant. Med hjälp av induktionsprincipen får vi nu påståendet.

---

**I3.** Låt $a$ och $b$ vara två satser eller påstenden. Förklara varför satsen

$$(a \to b) \mid (b \to a)$$

är en tautologi, dvs. är sann oberoende av om $a$ och $b$ är sanna eller falska. Ge ett exempel på tolkningar av $a$ och $b$ så att man av påståendet ”om $a$ så $b$ eller om $b$ så $a$” ser att implikationen $\to$ inte alltid motsvarar vad man i dagligt tal avser då man säger ”om .... så ....”.

*Lösning:* Uttrycket $(a \to b) \mid (b \to a)$ kan också skrivas som $(!a \mid b) \mid (!b \mid a)$. Om $a$ är sant är $(!b \mid a)$ sant och däremd hela satsen. Om $a$ är falskt är $(!a \mid b)$ sant och därmed också hela satsen.

Ett exempel på tolkningar kunde vara// om ”Amalia far till Stockholm” så ”regnar det i Spanien” eller om ”det regnar i Spanien” så ”far Amalia till Stockholm”,
vilket inte låter särskilt förnuftigt.

---

**I4.** Uttryck följande satser på svenska och avgör vilka som är sanna och vilka falska (utan desto mera motiveringar).

(a) $\forall x((x \in \mathbb{Z}) \to (x - 1 \in \mathbb{Z}))$
(b) $\forall y \in \mathbb{Z}(\exists x \in \mathbb{Z}(y = x^2))$
(c) $(x \in \mathbb{R}) \to (x > 0 \to \exists y \in \mathbb{R}(y > 0 \;\&\; y < x))$.

*Ledning: Här är $\mathbb{Z}$ mängden heltal och $\mathbb{R}$ mängden av reella tal.*

*Lösning:* (a) ”För alla $x$ gäller att om $x$ är ett heltal så är $x - 1$ ett heltal” eller kortare ” för alla heltal $x$ är också $x - 1$ ett heltal”. Detta påstående är (naturligtvis) sant.

(b) ”För alla heltal $y$ finns det ett heltal $x$ så att $y$ är kvadraten av $x$”. Detta påstående är falskt.

(c) ”Om $x$ är ett reellt tal så gäller att om $x$ är positivt så finns det ett reellt tal $y$ så att $y$ är positivt och $y$ är mindre än $x$”.

---

**I5.** Ge ett exempel på en mängd med ett ”första” element $o$, en ”efterföljarfunktion” $S(x)$ definierad i denna mängd och likhet $==$ så att de två första av Peano’s axiom är uppfyllda, dvs.

- $\forall x(\forall y((S(x) == S(y)) \to (x == y)))$
- $\forall x(!(S(x) == o))$

och så att dessutom gäller $\forall x(!(x == 0) \to (\exists y(x == S(y))))$ men induktionsaxiomet inte gäller.

*Lösning:* Vi väljer mängden $M$ så att den är en delmängd av $\mathbb{R}$ (mängden av reella tal), det första elementet $o$ kan vara $0$ och efterföljarfunktionen $S$ kan väljas så att $S(x) = x + 1$. Då kommer det andra axiomet att gälla. För att det första axiomet också skall gälla så måste $\{-1, -2, -3, \ldots\} \subset \mathbb{R} \setminus M$, dvs. inget negativt heltal kan höra till $M$. De naturliga talen $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ måste vara en delmängd i $M$ eftersom $0 \in M$. Men också alla reella tal som inte är heltal kanockså höra till $M$ som alltså kan väljas så att

$$M = \Big\{ x \in \mathbb{R} : x \notin \{-1, -2, -3, \ldots,\} \Big\}.$$

För att se att induktionsaxiomet inte gäller kan vi definiera predikatet $P$ så att $P(x)$ är sant för alla $x \in \mathbb{N}_0$ men $P(x)$ är falskt då $x \in M \setminus N_0$. . Då är $P(o)$ sant och $\forall x P(x) \rightarrow P(S(x)))$ är också sant, men $\forall x P(x)$ är inte sant vilket innebär att induktionsaxiomet inte gäller.

---