Lien algebrat ja monistot Harjoitus 6

6.1 G d-ulotteinen matriisiryhmä, $\mathfrak{g}$ sen Lien alg.

<u>Adjungoitu kuvaus</u>: Jos $g \in G$,

$$(\mathrm{Ad})_g : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$
$$a \longmapsto gag^{-1}$$

(Huom: $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Lin}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$)

Olkoon $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ lin. isomorfismi

$e_1, \dots, e_d$ kanta $\mathfrak{g}$:lle s.e. $\Phi(e_i) = \overbrace{(0, \dots, \underset{(i)}{1}, 0, \dots, 0)}^{f_i}$.

Tällöin $\forall g \in G \quad \exists A_g \in GL_d(\mathbb{R})$ s.e.

$$(\mathrm{Ad})_g(a) = \Phi^{-1}(A_g \cdot \Phi(a)), \quad a \in \mathfrak{g}$$

Ratkaistaan A_g:

$$\Phi((\mathrm{Ad})_g(e_i)) = A_g \cdot \Phi(e_i)$$
$$\Rightarrow \Phi(g e_i g^{-1}) = A_g \cdot f_i$$
$$\Rightarrow \boxed{(A_g)_{ij} = \Phi(g e_i g^{-1}) \cdot f_j^T}$$

Näytetään, että A_g riippuu sileästi $g \in G$:stä.

G mat. ryhmä $\Rightarrow G \subset GL_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K}) \subset \mathbb{R}^s$

Olkoon $p \in G$. $GL_n(\mathbb{K})$ avoin $M_n(\mathbb{K})$:ssa

$\Rightarrow \exists$ avoin $U \ni p$ s.e. $U \subset GL_n(\mathbb{K})$

Nyt $B_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}$
$u \longmapsto \tilde{\Phi}(\underbrace{u e_i u^{-1}}_{\in M_n(\mathbb{K})}) \cdot f_j^T$ on sileä.

$B_{ij}(g) = (A_g)_{ij} \quad \forall g \in U \cap G$

$\tilde{\Phi}$ Φ:n laajennus $M_n(\mathbb{K})$:hon.
$\tilde{\Phi}(k_j) = 0$ jos $\{e_1, \dots, e_d, k_1, \dots, k_s\}$ virittävät $M_n(\mathbb{K})$:ta.

$g \mapsto A_g$ sileä.

$\square$

6.2 G_1, G_2 matriisiryhmiä

gl_1, gl_2 vastaavat Lien algebrat, $gl_i = T_I G_i$.

$f : G_1 \longrightarrow G_2$ sileä homomorfismi

$(df)_I : \underbrace{T_I G_1}_{=gl_1} \longrightarrow \underbrace{T_I G_2}_{=gl_2}$ bijektio

Väite: $(df)_g : T_g G_1 \longrightarrow T_{f(g)} G_2$ bijektio $\forall g \in G$.

Tod. Olkoon $v \in T_g G_1$; $v = \alpha'(0)$, $\alpha(0) = g$

$$(df)_g(v) = (f \circ \alpha)'(0)$$

$$= (f \circ L_g \circ L_{g^{-1}} \circ \alpha)'(0)$$

f homomorf. $\stackrel{?}{=} g\left(f(L_{g^{-1}} \circ \alpha)\right)'(0) = 0$

$\beta(t) = L_{g^{-1}} \alpha(t)$ $\Rightarrow$ $(f \circ \beta)'(0) = 0$

$\beta(0) = I$

$$\Rightarrow (df)_I \underbrace{\beta'(0)}_{= g^{-1} \alpha'(0) = g^{-1} v} = 0$$

$$\Rightarrow v = 0$$

df_g lineaarinen $\Rightarrow$ $(df)_g$ injektio.

Surjektio: $(df)_I$ lin bijektio $\Rightarrow$ $\dim T_I G_1 = \dim T_I G_2$

$\Rightarrow \dim T_g G_1 = \dim T_{f(g)} G_2$

$(df)_g : T_g G_1 \longrightarrow T_{f(g)} G_2$ lin. injektio

dim. lause $\Rightarrow$ $\dim \underbrace{\mathrm{Ker}(df)_g}_{\{0\}} + \dim \mathrm{Im}(df)_g = \underbrace{\dim T_g G_1}_{= \dim T_{f(g)} G_2}$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(df)_g = T_{f(g)} G_2$ $\square$

6.3 $SO(3)$ ei kommutatiivinen.

a) $\mathfrak{o}(3)$:lla on kanta A_1, A_2, A_3 s.e.
$= \cancel{\mathfrak{so}}(3)$

$$[A_1, A_2] = A_3, \dots$$

$\Rightarrow$ A_1 & A_2 eivät kommutoi

Miten tästä seuraa, että $SO(3)$ ei kommutoi?

<u>Lause 8.1.2</u>: Olkoon $A, B \in \mathfrak{g}$

$$\left[\exists \varepsilon > 0 \text{ s.e. } \forall t,s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ niin } [e^{tA}, e^{sB}] = 0\right]$$
$$\Rightarrow [A,B] = 0$$

negaatio:

$$[A,B] \neq 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, t,s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ s.e. } [e^{tA}, e^{sB}] \neq 0$$

eli jos $A, B \in \mathfrak{g}$ niin

$$[A,B] \neq 0 \Rightarrow \exists\, t,s \in \mathbb{R} \text{ s.e. } [\underbrace{e^{tA}}_{\in G}, \underbrace{e^{sB}}_{\in G}] \neq 0.$$

sillä $A \in \mathfrak{g}$
$\mathfrak{g}$ v.avaruus
ja Lause 7.1.1

$\leadsto$ $\exists\, t,s \in \mathbb{R}$ s.e. $e^{tA_1}, e^{tA_2} \in SO(3)$ eivät kommutoi.

b) Intuitiivisesti tämä pitäisi olla selvä.

```
In[42]:= R1 = {{0, 1, 0}, {-1, 0, 0}, {0, 0, 1}};
         R2 = {{1, 0, 0}, {0, 0, 1}, {0, -1, 0}};

In[44]:= R1.Transpose[R1] // MatrixForm
         Det[R1]
         R2.Transpose[R2] // MatrixForm
         Det[R2]
```

Out[44]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[45]= 1

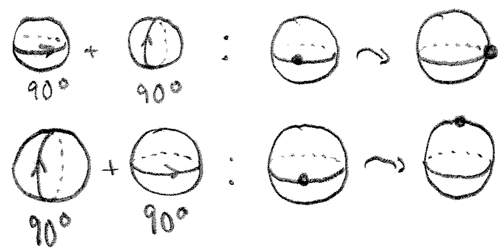
Out[46]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[47]= 1

```
In[48]:= R1.R2 // MatrixForm
         R2.R1 // MatrixForm
```

Out[48]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[49]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



c) Jos $A, B \in SO(3)$ $[A,B] \neq 0$ aseta $\tilde{A} = \mathrm{diag}(A, 1, \dots, 1)$, $\tilde{B} = \mathrm{diag}(B, 1, 1, \dots, 1)$

(6.4) $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline v & 1 \end{array} \right) \mid A \in O(2),\ v \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Näytetään: $\mathfrak{isom}(2) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline v & 0 \end{array} \right) \mid A \in \mathfrak{o}(2),\ v \in \mathbb{R}^2 \right\}$

($\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n) =$ vinosymmetriset $n \times n$ $\mathbb{R}$-matriisit.)

$\boxed{\subset}$ $A \in \mathfrak{isom}(2) \Rightarrow A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha'(0) & 0 \\ \hline \beta'(0) & 0 \end{array} \right)$ missä

$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O(2)$, $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$

$\alpha(0) = I$, $\beta(0) = 0$

$\Rightarrow \alpha'(0) \in \mathfrak{o}(2)$, $\beta'(0) \in \mathbb{R}^2$.

$\boxed{\supset}$ $A \in \mathfrak{o}(2)$, $v \in \mathbb{R}^2$. $\Rightarrow \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O(2)$, $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$

s.e. $\alpha(0) = I$, $\alpha'(0) = A$, $\beta(0) = 0$, $\beta'(0) = v$

Aseta $\gamma(t) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha(t) & 0 \\ \hline \beta(t) & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \gamma'(0) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline v & 1 \end{array} \right)$ $\gamma(0) = I$ $\square$

Tiedetään: $\mathfrak{o}(3) = \mathrm{span}\{A_1, A_2, A_3\}$ (sivu 8.5)

$[A_1, A_2] = A_3$, $[A_3, A_1] = A_2$, $[A_2, A_3] = A_1$.

Jos $f : \mathfrak{o}(3) \to \mathfrak{isom}(2)$ Lien isomorfismi

$\Rightarrow f([A_i, A_j]) = [f(A_i), f(A_j)]$ $i, j = 1, 2, 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(A_1) = [f(A_2), f(A_3)] = \left(\begin{array}{c|c} R_1 & 0 \\ \hline v_1 & 0 \end{array} \right) \\ f(A_2) = [f(A_3), f(A_1)] = \left(\begin{array}{c|c} R_2 & 0 \\ \hline v_2 & 0 \end{array} \right) \\ f(A_3) = [f(A_1), f(A_2)] = \left(\begin{array}{c|c} R_3 & 0 \\ \hline v_3 & 0 \end{array} \right) \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline v & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline w & 0 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline w & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline v & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} SR - RS & 0 \\ \hline v \cdot R - w \cdot S & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{[R_2, R_3]}_{=0} = R_1, \quad \underbrace{[R_3, R_1]}_{=0} = R_2, \quad \underbrace{[R_1, R_2]}_{=0} = R_3$$

sillä $[A, B] = 0$ $\mathfrak{o}(2)$:ssa

$\Rightarrow R_1 = R_2 = R_2 = 0$ $\lightning$ sillä R_i:t virittävät $\mathfrak{o}(2)$:sta

$\square$

(6.5) $f: G_1 \longrightarrow G_2$, C^1 homomorfismi, G_i matriisiryhmiä

$\mathfrak{g}_1$ $\mathfrak{g}_2$ vastaavat Lien algebrat.

<u>Väite:</u> $f(e^v) = e^{(df)_I(v)}$, $\forall v \in \mathfrak{g}_1$,

eli seuraava kaavio kommutoi:

$$\begin{tikzcd} v \in \mathfrak{g}_1 \arrow[r, "df"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{g}_2 \arrow[d, "\exp"] \\ G_1 \arrow[r, "f"'] & G_2 \end{tikzcd}$$

$\exp: \mathfrak{g} \longrightarrow G$
Lause 7.1.1.

<u>Tod.</u> Tarkastellaan kuvausta

$$\gamma: t \longmapsto f(e^{v \cdot t}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

γ on $G_2 \subset GL_n(\mathbb{K})$:n 1-parametriryhmä:

1) γ on differentioituva

2) $\gamma(t_1 + t_2) = f(e^{vt_1} \cdot e^{vt_2}) = \gamma(t_1) \cdot \gamma(t_2)$.

<u>Lause 6.3.6:</u> $\gamma(t) = e^{At}$ jollain $A \in \underbrace{gl_n(\mathbb{K})}_{= M_n(\mathbb{K}) \text{ (Lause 5.2.1)}}$.

eli $f(e^{v \cdot t}) = e^{At}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (df)_I \cdot v \cdot e^0 = A \cdot e^0$ $\quad \Big| \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$

$\Rightarrow A = (df)_I \cdot v$

$\underset{t=1}{\Rightarrow} f(e^v) = e^{(df)_I \cdot v}$

b) Lause 7.1.3 – 7.1.4 $\Rightarrow \exists r > 0$ s.e. $I \in B_r \subset_o M_n(\mathbb{K})$ avoin

ja $\exp: B_r \longrightarrow \exp(B_r)$ diffeo

Jos $u \in B_r$; $f(u) = f(\exp \exp^{-1} u) = \exp((df)_I \exp^{-1} u)$

$\rightsquigarrow$ on sileä B_r:ssä

$\rightsquigarrow$ f sileä $G \cap B_r$:illä. $\square$

6.6 Tämä tehtävä perustuu seuraavaan lemmaan:

Lemma: Jos $p \in G$, niin $T_pG = p\,\mathfrak{g}$

Tod. $T_pG = \{ \alpha'(0) \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G,\ \alpha(0) = p \}$

$= \{ p(\underbrace{p^{-1}\alpha}_{=\beta})'(0) \mid p^{-1}\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to G,\ p^{-1}\alpha(0) = I \}$

$= p\,\{ \beta'(0) \mid \beta : (-\varepsilon,\varepsilon) \to G,\ \beta(0) = I \}$

$= p\,\mathfrak{g}$ □

Sitten: $TG = \{ (p,v) \mid p \in G,\ v \in T_pG \}$

$= \{ (p,v) \mid p \in G,\ v \in p\,\mathfrak{g} \}$

$= \{ (p, pu) \mid p \in G,\ u \in \mathfrak{g} \}$

$= G \cdot (I \times T_IG) = G \cdot (I \times \mathfrak{g})$

$L : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ lin. isom.

$= \Psi(G \times \mathbb{R}^d)$

missä $\Psi : G \times \mathbb{R}^d \longrightarrow TG$

$(g,u) \longmapsto (g,\ g\,L^{-1}(u))$

Ψ sileä : $(g,u) \longmapsto (g, L^{-1}(u))$ sileä kun $(g,u) \in M_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{R}^d$

bijektio: selvä

$\Psi^{-1} : TG \longrightarrow G \times \mathbb{R}^d$ Sileä koska $GL_n(\mathbb{K})$ avoin

$(g,v) \longmapsto (g, L(g^{-1}v))$ $M_n(\mathbb{K})$:ssa.

Ψ bijektio $\rightsquigarrow$ TG ja $G \times \mathbb{R}^d$ diffeomorfisia.

$f : G \times S^{d-1} \longrightarrow T^1G$

$(g,v) \longmapsto \left(g,\ \dfrac{g\,L^{-1}(v)}{|g\,L^{-1}(v)|}\right)$

f injektio: $f(g,v) = f(\tilde g, \tilde v) \Rightarrow g = \tilde g,\ \dfrac{L^{-1}(v)}{|g\,L^{-1}(v)|} = \dfrac{L^{-1}(\tilde v)}{|g\,L^{-1}(\tilde v)|}$

$\Rightarrow v \parallel \tilde v \Rightarrow v = \tilde v$ □

f surjektio Olkoon $(g,u) \in T^1G$, $|u|=1$

$$f\left(g, \frac{L(g^{-1}u)}{|L(g^{-1}u)|}\right) = \left(g, \frac{gL^{-1}\left(\frac{L(g^{-1}u)}{\cancel{|L(g^{-1}u)|}}\right)}{\left|gL^{-1}\left(\frac{L(g^{-1}u)}{\cancel{|L(g^{-1}u)|}}\right)\right|}\right)$$

$$= \left(g, \frac{u}{|u|}\right) = (g,u).$$

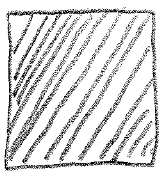
f on sileä ... $f^{-1}(g,u) = \left(g, \frac{L(g^{-1}u)}{|L(g^{-1}u)|}\right)$ on sileä...

□

Erityisesti: $T^1(S^3) = S^3 \times S^2$. □

S^3 = 1-kkö kvaternionien ryhmä.

Lisäys tehtävään 5.3. Huom G ei monisto kun λ irrationaalinen. Tällöin G on näytti tältä

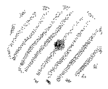


$G \subset \mathbb{R}^k$

G monisto: $\forall p \in G$ $\exists$ (G:ssä) avoin $U \ni p$
$\exists$ diffeo $U \longrightarrow V \subset_o \mathbb{R}^n$.

toruksessa

G:n avoimet joukot ovat muotoa $W \cap G$:

 joka ei diffeo minkään polkuyhtenäisen joukon kanssa □