5.1 Olkoon $A = j \in Sp(1) = \{u \in \mathbb{H} \mid |u| = 1\} \simeq S^3$

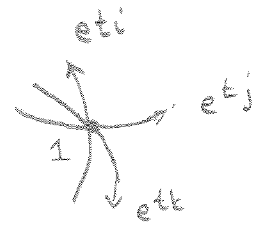
Tällöin $e^{tj} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \underbrace{j^k}_{= 1, j, -1, -j, 1, \dots}$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} t^{2k} \underbrace{(-1)}_{=j^2}{}^k}_{=\cos t} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} t^{2k+1}}_{= j \cdot \sin t} \underbrace{j^{2k+1}}_{= j \cdot (-1)^k}$$

$$= \cos t + j \sin t$$

Vastaavasti: $e^{ti} = \cos t + i \sin t$

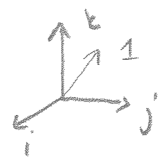
$e^{tk} = \cos t + k \sin t$



Huom: $\gamma(t) = e^{tj} \in Sp(1) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Huom 2: Olkoon X $Sp(1)$:n vektorikenttä R_j:

$$X : Sp(1) \longrightarrow Sp(1)$$
$$u \longmapsto R_j u = uj$$



(X on siis jonkinlainen kierto j-akselin ympäri 4D:ssä)

Olkoon lisäksi $w \in Sp(1)$ ja $\alpha(t) = w \cdot e^{jt}$, $t \in \mathbb{R}$.

Tällöin $\alpha(0) = w$

$$\alpha'(t) \underset{\uparrow}{=} w e^{jt} j = \alpha(t) \cdot j = R_j(\alpha(t))$$

L 5.3.1 & 6.2.1

eli $\alpha(t)$ on $\underset{=X}{R_j}$:n integraalikäyrä alkiosta $w \in Sp(1)$.

Huom: $\alpha'(t) = (X \circ \alpha)(t)$.

5.2 $G = \{ g_t \mid t \in \mathbb{R} \}$ $\qquad g_t = \mathrm{diag}\left(e^{2\pi t i}, e^{2\pi \lambda t i} \right)$

<u>Huom:</u> g_t määräytyy kahdesta kulmasta $2\pi t$, $2\pi\lambda t$ joten G voidaan tulkita toruksen käyränä.

(a) $\lambda = 0$ $\quad G \cong S_1 = 1$-monisto:

(b) $\lambda = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ja $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ ei ole yhteisiä tekijöitä. Nyt G on 1-monisto. Sopivia karttoja ovat

$$\varphi : \left(-\tfrac{n}{2}, \tfrac{n}{2}\right) \longrightarrow G, \quad t \longmapsto g_t \qquad\qquad \kappa : (0, n) \longrightarrow G, \quad t \longmapsto g_t$$

<u>1°</u> φ, κ sileitä.

<u>2°</u> $\forall t \in \mathbb{R}$ pätee

$$g_{t \pm n} = \mathrm{diag}\Big(e^{2\pi t i} \cdot \underbrace{e^{2\pi(\pm n) i}}_{=1}, \; e^{2\pi \frac{m}{n} t i} \cdot \underbrace{e^{2\pi \frac{m}{n}(\pm n) i}}_{=1} \Big)$$

$$= g_t$$

$\Rightarrow g_t$ on n-periodinen $\Rightarrow \varphi, \kappa$ peittävät G:n

<u>3°</u> <u>Injektio</u>. Olkoon $|t-s| < n$, $g_t = g_s$. $\left[\text{Esim } t, s \in (0,n),\ \kappa(t) = \kappa(s) \right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{2\pi(t-s)i} = 0 \\ e^{2\pi \frac{m}{n}(t-s) i} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t - s \in \mathbb{Z} & (*) \\ \frac{m}{n}(t-s) \in \mathbb{Z} & (**) \end{cases}$$

$(**) \Rightarrow \quad t - s \in \{ 0, \pm \frac{n}{m}, \pm 2\frac{n}{m}, \dots \}$

$(*) \Rightarrow \quad t - s = 0$ tai $\frac{n}{m} \in \mathbb{Z}$ jolloin $m = 1$

$t - s \in \{ \pm n, \pm 2n, \dots \} \Rightarrow |t-s| \geq n$ ↯

$\underline{g^{-1} : G \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{sileä}}$


```
In[1]:= G = {Exp[u] Cos[2 Pi t], Exp[u] Sin[2 Pi (t )], Exp[v] Cos[2 Pi λ (s)], Exp[v] Sin[2 Pi λ (s )]}

Out[1]= {e^u Cos[2 π t], e^u Sin[2 π t], e^v Cos[2 π s λ], e^v Sin[2 π s λ]}

In[2]:= DG = {D[G, t], D[G, s], D[G, u], D[G, v]}
        DG /. {u → 0, v → 0, w → 0}
        % // MatrixForm
        FullSimplify[Det[%]]

Out[2]= {{-2 e^u π Sin[2 π t], 2 e^u π Cos[2 π t], 0, 0}, {0, 0, -2 e^v π λ Sin[2 π s λ], 2 e^v π λ Cos[2 π s λ]},
         {e^u Cos[2 π t], e^u Sin[2 π t], 0, 0}, {0, 0, e^v Cos[2 π s λ], e^v Sin[2 π s λ]}}

Out[3]= {{-2 π Sin[2 π t], 2 π Cos[2 π t], 0, 0}, {0, 0, -2 π λ Sin[2 π s λ], 2 π λ Cos[2 π s λ]},
         {Cos[2 π t], Sin[2 π t], 0, 0}, {0, 0, Cos[2 π s λ], Sin[2 π s λ]}}

Out[4]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -2\pi\,\mathrm{Sin}[2\pi t] & 2\pi\,\mathrm{Cos}[2\pi t] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\pi\lambda\,\mathrm{Sin}[2\pi s\lambda] & 2\pi\lambda\,\mathrm{Cos}[2\pi s\lambda] \\ \mathrm{Cos}[2\pi t] & \mathrm{Sin}[2\pi t] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Cos}[2\pi s\lambda] & \mathrm{Sin}[2\pi s\lambda] \end{pmatrix}$$

Out[5]= $-4\pi^2\lambda$ $\quad \Phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

eli kuvaus $(t,s,u,v) \longmapsto (e^{2\pi i t + u}, e^{2\pi \lambda i t + v}) \in \mathbb{R}^4$

on sileä ja lokaalisti sillä on sileä käänteiskuvaus.

Haluamme osoittaa, että $g_t^{-1} : G \longrightarrow \mathbb{R}$ on sileä.

Olkoon $p \in G$. Tällöin $p = \Phi(\tilde{p})$ jollain $\tilde{p} \in \mathbb{R}^4$.

$\det(D\Phi)_p \neq 0 \Rightarrow \exists\ U \subset \mathbb{R}^4$ s.e. $p \in U$

$\Phi : U \longrightarrow \Phi(U)$ diffeo.

$\Phi(U)$ on p:n avoin ystö.

Olkoon $\pi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(t,s,u,v) \longmapsto t$

Kuvaus $\pi \circ \Phi^{-1} : \Phi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ on sileä ja

$$\pi \circ \Phi^{-1}\Big|_{\Phi(U) \cap G} = g_t^{-1}$$

eli jos $q \in \Phi(U) \cap G$, $q = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \lambda t})$, niin $g_t^{-1}(q) = t$

$\pi \circ \Phi^{-1}(q) = t$ $\square$

c) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Nyt G on 1-monisto. Sopiva kartta on

$$g_t : \mathbb{R} \longrightarrow G$$
$$t \longmapsto g_t$$

1° Selvä: surjektio, sileys

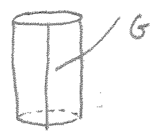
2° injektio: Olkoon $t, s \in \mathbb{R}$, $g_t = g_s$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{i 2\pi (t-s)} = 1 \\ e^{i \lambda 2\pi (t-s)} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t - s \in \mathbb{Z} \\ \lambda (t-s) \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

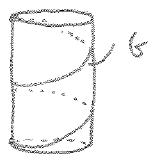
$\Rightarrow$ $t = s$ tai $\lambda \in \mathbb{Q}$.

3° φ^{-1} sileys kuten b) tapauksessa $\square$

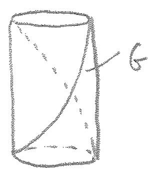
Tulkinta: a)



b)



tai



c) G on toruksen $T = \{ \mathrm{diag}(e^{i2\pi\alpha}, e^{i2\pi\beta}) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$ tiheä osajoukko. (Luennot s7.5) $\square$

5.3 G mat. ryhmä

$$G_0 = \{ g \in G \mid \exists \text{ jva. } \gamma : [0,1] \to G, \ \gamma(0) = I, \ \gamma(1) = g \}$$

= alkiot jotka ovat samassa komponentissa kuin I.

<u>G_0 on matriisiryhmä</u>

G_0 on aliryhmä: $I \in G_0$

$A, B \in G_0 \Rightarrow \exists \gamma_A, \gamma_B \Rightarrow \gamma(t) = \gamma_A(t) \cdot \gamma_B(t)$ toteuttaa:

$\gamma(0) = I \quad \gamma(1) = AB$

$\Rightarrow AB \in G_0$

$A \in G_0 \Rightarrow \gamma : [0,1] \longrightarrow G \subset GL$ s.e. $\gamma(0) = I$, $\gamma(1) = A$

Olkoon $\eta : [0,1] \longrightarrow G$, $t \longmapsto (\gamma(t))^{-1}$. Tällöin $\eta(0) = I$, $\eta(1) = A^{-1}$ $\rightsquigarrow A \in G_0$

<u>G_0 on suljettu GL:issä.</u>

<u>Lemma:</u> Matriisiryhmä on lokaalisti polkuyhtenäinen.

<u>Tod.</u> Lause 7.2.1 mat. ryhmä on monisto.
Olkoon $p \in G$ = mat. ryhmä. Tällöin löytyy diffeomorfismi $\varphi : U \longrightarrow V$, U, V avoimia $U \ni p$, $V \subset \mathbb{R}^n$. Sopiva polkuyhtenäinen ystö p:lle on $\varphi^{-1} B_\varepsilon(\varphi(p))$. □

Määritellään G:hen ekvivalenssirelaatio

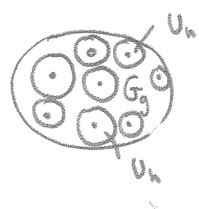
$$g \sim h \iff \exists \text{ jva } \gamma : [0,1] \longrightarrow G \text{ s.e. } \gamma(0) = g,\ \gamma(1) = h.$$

Merk.: $G_g = \{ h \in G \mid h \sim g \}$

Esim $G_0 = G_I$.

<u>Väite:</u> G_g avoin kaikilla $g \in G$.

<u>Tod</u> Lemma $\Rightarrow$ jokaisella $h \in G_g$:lla on avoin ystö $U_h \subset G$ joka on polkuyhtenäinen.



$$G_g = \bigcup_{h \in G_g} \underbrace{U_h}_{\text{avoin}} \Rightarrow \text{väite}$$

$\boxed{\subset}$ $h \in G_g \Rightarrow h \in U_h$

$\boxed{\supset}$ Jos $z \in U_h$ jollain $h \in G_g$

$\Rightarrow z \sim h$ ja $h \sim g \Rightarrow z \sim g \iff z \in G_g$ □

Väite $G \setminus G_0$ avoin (ja siten G_0 suljettu.)

Tod Osoitetaan, että

$$G \setminus G_0 = \bigcup_{z \in G \setminus G_0} G_z$$

josta väite seuraa.

$\boxed{\subset}$ $g \in G \setminus G_0 \Rightarrow g \in G_g$

$\boxed{\supset}$ Olkoon $g \in G_z$, $z \in G \setminus G_0$

$$\Rightarrow \underbrace{g \sim z} \quad \text{ja} \quad \neg\{z \sim I\}$$

$\uparrow$ negaatio

Jos $g \notin G \setminus G_0$ niin $g \in G_0$ eli $g \sim I \Big\} \Rightarrow z \sim I$ ↯ □

b) G_0 on normaali aliryhmä.

Huom Jos $g, h \in G$ niin $g \sim I \iff hgh^{-1} \sim I$

$g \sim I \Rightarrow \exists\, \gamma : [0,1] \to G$, $\gamma(0) = g$ $\gamma(1) = I$

Aseta $\eta : [0,1] \to G$, $\eta(t) = h\gamma(t)h^{-1} \Rightarrow hgh^{-1} \sim I$

$hgh^{-1} \sim I \Rightarrow h^{-1}(hgh^{-1})h \sim I \Rightarrow g \sim I$ □

Olkoon $h \in G$.

$$\begin{aligned}
gG_0 &= \{gh \mid h \sim I,\ h \in G\} \\
&= \{gh \mid ghg^{-1} \sim I,\ h \in G\} \\
&= \{ghg^{-1} \mid ghg^{-1} \sim I,\ h \in G\}\, g \\
&= \{z \mid z \sim I,\ z \in \underbrace{gGg^{-1}}_{=G}\}\, g \qquad ghg^{-1} = z \\
&= G_0 \cdot g \quad \square \qquad\qquad h = g^{-1}zg
\end{aligned}$$

5.4 X monisto

$$p \in X, \quad T_pX = \{ \alpha'(0) \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X, \ \alpha(0) = p \}$$

$$TX = \{ (p, v) \mid p \in X, \ v \in T_pX \}$$

Olkoon $p \in X$. Koska X on monisto löytyy avoin $U \subset X$ ja sileä kuvaus $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ s.e $p \in U$.

Sitten $TU = \{ (\alpha(0), \alpha'(0)) \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \}$

$$= \Big\{ \Big(\varphi^{-1}(\varphi \circ \alpha)(0), \underbrace{(D\varphi)^{-1}_{(\varphi\circ\alpha)(0)} \cdot \underbrace{(D\varphi)_{\alpha(0)}}_{\text{Kuvauksen } \varphi \text{ Jacobiaani } \alpha(0)\text{:issa}} \cdot \alpha'(0)}_{= Id} \Big) \ \Big| \ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \Big\}$$

$$= \Big\{ \Big(\varphi^{-1}(\varphi\circ\alpha)(0), (D\varphi)^{-1}_{(\varphi\circ\alpha)(0)} (\varphi\circ\alpha)'(0) \Big) \ \Big| \ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \Big\}$$

$$= F \underbrace{\Big\{ \Big(\underbrace{(\varphi\circ\alpha)(0)}_{\in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n}, \underbrace{(\varphi\circ\alpha)'(0)}_{= \mathbb{R}^n} \Big) \ \Big| \ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \Big\}}_{= \text{avoin } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\text{:ssä.}}$$

missä

$$F : \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TU$$
$$(\tilde{p}, \tilde{v}) \longmapsto \big(\varphi^{-1}(\tilde{p}), (D\varphi)^{-1}_{\tilde{p}} \cdot \tilde{v} \big)$$

φ sileä $\Rightarrow$ F sileä.

<u>injektio:</u> $F(\tilde{p}, \tilde{v}) = F(\tilde{q}, \tilde{w})$

$$\Rightarrow \varphi^{-1}(\tilde{p}) = \varphi^{-1}(\tilde{q}) \Rightarrow \tilde{p} = \tilde{q} \quad \text{sillä } \underbrace{\varphi \text{ diffeo}}_{\Rightarrow D\varphi \text{ kääntyvä.}}$$

$$\Rightarrow (D\varphi^{-1})_{\tilde{p}} \tilde{v} = (D\varphi^{-1})_{\tilde{p}} \tilde{w} \Rightarrow \tilde{v} = \tilde{w}$$

F surjektio: $(p,v) \in TU$ $\quad p \in U$, $v = \alpha'(0)$ jollain $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$, $\alpha(0) = p$

$$F\big(\varphi(p),\ (D\varphi)_p \cdot \alpha'\big)$$

$$= \big(p,\ (D\varphi^{-1})_{\varphi(p)} (D\varphi)_p \cdot \alpha'(0)\big) = (p, \alpha'(0))$$

F^{-1} sileä. $\quad F^{-1} : TU \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$

$$(p,v) \longmapsto (\varphi(u), (D\varphi)_p(v))$$

Saatiin: TU on $2n$-monisto ja F^{-1} on sopiva kartta. $\square$

5.5 Implisiittifunktiolause:

Olkoon
$$\begin{cases} G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{sileä} \\ \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ (p, p') \in \mathbb{R}^n, \quad p \in \mathbb{R},\ p' \in \mathbb{R}^{n-1} \\ G(p,p') = 0 \quad \dfrac{\partial G}{\partial x_1}(p,p') \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ p':n lähellä löytyy sileä $g : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ s.e.

$$G(p,p') = 0 \iff p = g(p')$$

Erityisesti: $p' \mapsto (g(p'), p')$ parametrisoi pintaa $G=0$ pisteen (p,p'):in lähellä.

Jos X on n-monisto määritellään 1-tangenttikimppu:

$$T^1(X) = \{ (p,v) \mid p \in X,\ v \in T_pX \quad |v| = 1 \}$$

Kiinnitetään $(q,w) \in T^1(X)$.

TX monisto $\Rightarrow$ $\exists$ diffeomorfismi $F : TU \to \tilde{U} \times \mathbb{R}^n$

s.e. $TU \ni (q,w)$ on avoin ja $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ avoin.

$$\Rightarrow T^1(X) = \{ F^{-1}(\tilde{p},\tilde{v}) \mid (\tilde{p},\tilde{v}) \in \tilde{U} \times \mathbb{R}^n,\ |v| = 1 \}$$

$$(p,v) = F^{-1}(\tilde{p}\tilde{v})$$

$$= F^{-1}\{ (\tilde{p},\tilde{v}) \mid (\tilde{p},\tilde{v}) \in \tilde{U} \times \mathbb{R}^n,\ G(\tilde{p},\tilde{v}) = 0 \}$$

missä $G : \tilde{U} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(\tilde{p},\tilde{v}) \longmapsto |\underbrace{(D\varphi)^{-1}_{\tilde{p}}\tilde{v}}_{=v}|^2 - 1$$

Olkoon $F(q,w) = (\tilde{q},\tilde{w})$. Tällöin

$$G(\tilde{q},\tilde{w}) = |w|^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial \tilde{p}^i}(\tilde{q},\tilde{w}) = \dots \qquad \frac{\partial G}{\partial \tilde{v}^i}(\tilde{q},\tilde{w}) \neq 0$$

koska $D\varphi^{-1}$ kääntyvä ja $\tilde{w} \neq 0$

$$\frac{\partial}{\partial v^i}|A \cdot v|^2 = \frac{\partial}{\partial v_i}\sum_{r=1}^{n}\Big(\underbrace{\sum_{s=1}^{n} A_{rs} v_s}_{(A\cdot v)_r}\Big)^2$$

$$= \sum_{r=1}^{n} 2(A\cdot v)_r \cdot \sum_{s=1}^{n} A_{rs}\delta_{si}$$

$$= 2\left((A\cdot v)^T \cdot A\right)_i$$

Oletetaan, että $\frac{\partial G}{\partial \tilde{v}^n}(\tilde{q},\tilde{w}) \neq 0$

IFL $\Rightarrow$ $\exists$ avoimia $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $I \subset \mathbb{R}$ s.e.

$\tilde{w} \in W \times I \subset \mathbb{R}^n$

$\exists$ sileä $g : W \longrightarrow I$

s.e: $G(\tilde{q}, \tilde{v}', \tilde{v}_n) = 0 \iff \tilde{v}_n = g(\tilde{q}, \tilde{v}')$

$$T^1(X) \supset F^{-1}\{(\tilde p, \tilde v) \mid (\tilde p, \tilde v') \in \tilde U \times W,\ \tilde v_n = g(\tilde p, \tilde v')\}$$

$$= \overbrace{F^{-1} \circ \Phi \underbrace{\{(\tilde p, \tilde v') \in \tilde U \times W\}}_{\text{avoin joukko } \mathbb{R}^{2n-1}}}^{T^1(X) \text{ pisteen } (q,w) \text{ lähellä}}$$

$$\Phi : \tilde U \times W \longrightarrow \Phi(\tilde U \times W) \subset \tilde U \times \mathbb{R}^{n-1}$$
$$(\tilde p, \tilde v') \longmapsto (\tilde p, \tilde v', g(\tilde p, \tilde v'))$$

Selvä: Φ sileä bijektio

Φ^{-1} on ainoastaan projektion

$(\tilde p, \tilde v', \tilde v_n) \longmapsto (\tilde p, \tilde v')$ rajoittuma $\Phi(\tilde U \times W)$:lle

ja on siten sileä. (kts. S7.7) $\Rightarrow F^{-1} \circ \Phi$ on diffeo ja $T^1(X)$ on $2n-1$ monisto. □

5.6 $SO(3)$ ja $T^1(S^2)$ ovat diffeomorfisia

Olkoon e_1, e_2, e_3 $\mathbb{R}^3$:n standardikanta. Kyseinen kuvaus on

$$f: SO(3) \longrightarrow T^1(S^2)$$
$$A \longmapsto (e_1 \cdot A,\ e_2 \cdot A)$$

$f(A) \in T^1(S^2)$

$$|e_1 \cdot A| = \langle e_1, e_1 \rangle = 1 \Rightarrow A \cdot e_1 \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

Aseta $\gamma(t) = \dfrac{e_1 \cdot A + t\, e_2 \cdot A}{|e_1 \cdot A + t\, e_2 \cdot A|}$ $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

$$\gamma(0) = e_1 \cdot A \quad = 1$$

$$\gamma'(0) = \frac{e_2 \cdot A\, \overbrace{|e_1 \cdot A|} - e_1 \cdot A\, |e_1 \cdot A + t\, e_2 \cdot A|'(0)}{\underbrace{|A e_1|^2}_{=1}}$$

$$= e_2 \cdot A - e_1 \cdot A \frac{\langle e_1 \cdot A, e_2 \cdot A\rangle + 0}{|e_1 \cdot A|^2} = e_2 \cdot A \rightsquigarrow f(A) \in T(S^2)$$

$$|a + tb|' = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} (a_j + t b_j)^2\right)^{-3/2} \cdot \sum_{k=1}^{n} 2(a_k + t b_k) \cdot b_k$$

$$= \frac{\langle a, b\rangle + t|b|^2}{|a + tb|^2} \quad \text{kun } a, b \in \mathbb{R}^3$$

Koska lisäksi $\langle e_2 \cdot A, e_2 \cdot A \rangle = 1$ niin $f(A) \in T^1(S^2)$

<u>Surjektio</u> Olkoon $(p, v) \in T^1(S^2)$ $p \in S^2$, $v = \alpha'(0)$ jollain
$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^2$.

$$\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle = 1 \quad \forall t \Rightarrow 2\langle \alpha'(0), \alpha(0) \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \langle v, p \rangle = 0$$

Olkoon A matriisi

$$A = \begin{pmatrix} p \\ \hline v \\ \hline p \times v \end{pmatrix}$$

$$e_1 \cdot A = (1,0,0) \begin{pmatrix} p \\ \hline v \\ \hline p \times v \end{pmatrix} = p, \quad e_2 \cdot A = (0,1,0) \begin{pmatrix} p \\ \hline v \\ \hline p \times v \end{pmatrix} = v$$

$A \in O(3)$, sillä kaikki rivit muodostavat ON-kannan
(Lause 3.2.1)

$$\det A = p \cdot (v \times (p \times v))$$
$$= p \cdot (p(v \cdot v) - v(v \cdot p))$$
$$= 1 \Rightarrow A \in SO(3), \ f \text{ on surjektio}$$

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$$

<u>Injektio</u>: $A, B \in SO(3)$, $f(A) = f(B)$

$$\Rightarrow e_1 \cdot A = e_1 \cdot B, \quad e_2 \cdot B = e_2 \cdot A$$
$$\Rightarrow e_3 \cdot A = (e_1 \times e_2) \cdot A = (e_1 \cdot A) \times (e_2 \times A)$$
$$= (e_1 \cdot B) \times (e_2 \cdot B) = \text{''} = e_3 \cdot B$$

$$\Rightarrow A = B$$

<u>Sileys</u> f on sileän kuvauksen $M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $A \mapsto (e_1 \cdot A, e_2 \cdot A)$ rajoittuma $SO(3)$:lle

f^{-1} on sileän kuvauksen $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to M_3(\mathbb{R})$, $(p, v) \mapsto \begin{pmatrix} p \\ \hline v \\ \hline p \times v \end{pmatrix}$ rajoittuma $T^1(S^2)$:lle

$\therefore$ f on diffeomorfismi $SO(3) \to T^1(S^2)$ $\square$