0-ulotteinen torus G:llä. Jos se ei sisälly 1-ulotteiseen torukseen, niin se on maksimaalinen. Muuten valitaan 1-ulotteinen torus $T^1 \subset G$ ja jatketaan edelleen.

Maksimaalinen torus löytyy, sillä sen dimensio ei voi ylittää G:n dimensiota.

Merk. $R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

9.2.1. <u>Lause</u> Seuraavat torukset ovat maksimaalisia:

$$T = \{ \mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_m}) \mid \theta_i \in [0, 2\pi) \} \subset SO(2m)$$

$$T = \{ \mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_m}, 1) \mid \theta_i \in [0, 2\pi) \} \subset SO(2m+1)$$

$$T = \{ \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in [0, 2\pi) \} \subset U(n)$$

$$T = \{ \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in [0, 2\pi) \} \subset Sp(n)$$

$$T = \{ \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_{n-1}}, e^{-i(\theta_1 + \ldots + \theta_{n-1})}) \mid \theta_i \in [0, 2\pi) \} \subset SU(n)$$

<u>Huom.</u> Kukin toruksista T on ns. matriisiryhmän <u>standardi maksimaalinen torus.</u> Se ei ole ainoa maksimaalinen torus (kuten kohta nähdään) mutta se on yksinkertaisin kuvailla. Lisäksi pätee

$$T(SU(n)) = T(U(n)) \cap SU(n)$$

<u>Tod:</u> Kussakin tapauksessa T torus nähdään heti. Vaikeampaa on näyttää maksimaalisuus.

(9.9.)

Osoitetaan tämä (kussakin tapauksessa erikseen) näyttämällä, että $\forall g \in G$, joka kommutoi kaikkien T:n alkioiden kanssa pätee $g \in T$. (Mahdollisen korkeampiulotteisen toruksen alkiot kommutoivat kaikkien T:n alkioiden kanssa, joten maksimaalisuus seuraa tästä)

$1°$ $\underline{SO(n)}$: Os. $T = \{diag(R_{\theta_1}, R_{\theta_2}, 1) \mid \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)\}$ on $SO(5)$:n maksimaalinen torus. Argumentit yleistyvät ye. $SO(n)$:n tapaukseen $\forall$ parillisilla ja parittomilla n.

Ol. $g \in SO(5)$ ja $gx = xg$ $\forall x \in T$. Ol. θ kulma, joka ei π:n kokonaislukumonikerta. Erityisesti siis $gA = Ag$, missä $A = diag(R_\theta, R_\theta, 1) \in T$.

Huom. $e_5 = (0,0,0,0,1)$:n monikerrat ovat ainoat $\mathbb{R}^5$:n vektorit jotka R_A pitää paikallaan. Pätee:

$e_5 gA = e_5 Ag = e_5 g$, joten $e_5 g = \pm e_5$ $\Rightarrow$ g:n 5. rivi $= (0,0,0,0,\pm 1)$.

g kommutoi alkion $A := diag(R_\theta, 1, 1, 1) \in T$ kanssa. Ainoat vektorit, jotka R_A pitää paikallaan, sisältyvät span$\{e_3, e_4, e_5\}$:n. $\forall i \in \{3,4\}$ pätee

$e_i gA = e_i Ag = e_i g$, joten $R_A(e_i g) = e_i g$ ja $e_i g \in$ span$\{e_3, e_4, e_5\}$.

Lisäksi $e_i g \in \mathrm{span}\{e_3, e_4\}$, sillä muuten $\langle e_i g, e_5 g \rangle \neq 0$.

Saatiin: g:n 3:s ja 4:s rivi ovat muotoa $(0,0,a,b,0)$.

Toistamalla argumentti alkioon $A := \mathrm{diag}(1,1,R_\theta,1)$

saadaan: 1:n ja 2:n rivi muotoa $(a,b,0,0,0)$.

Saatiin $g = \mathrm{diag}(g_1, g_2, \pm 1)$, $g_1, g_2 \in M_2(\mathbb{R})$.

Koska $g \in SO(5)$ täytyy päteä $g_1, g_2 \in O(5)$

Pitää os. $g_1, g_2 \in SO(2)$, jonka jälkeen viimeinen

komponentti oltava $+1$ $(\det g = 1)$.

Vo: $g_1 \in O(2) \setminus SO(2)$. Tällöin g ei kommutoi $\mathrm{diag}(R_\theta, 1,1,1)$:n

kanssa (sillä g_1 ei kommutoi R_θ:n kanssa HT 3.2 b),

sillä θ ei π:n kokonaislukumonikerta) ↯

$\Rightarrow g_1, g_2 \in SO(2) \Rightarrow g \in T$.

2° $\underline{U(n)}$: Os. $T = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in [0, 2\pi)\}$

maks. torus $U(n)$:ssä. Ol. $g \in U(n)$ kommutoi $\forall$ T:n

alkion kanssa. Ol. θ ei π:n kokonaislukumonikerta.

Erit. $gA = Ag$, kun $A = \mathrm{diag}(e^{i\theta}, \ldots, e^{i\theta}, 1) \in T$

Aikoin $e_n = (0, \ldots, 1)$ kompleksiset monikerrat ovat ainoat

$\mathbb{C}^n$:n vektorit, jotka R_A kiinnittää. Pätee

$e_n g A = e_n A g = e_n g$ l. $R_A(e_n g) = e_n g \Rightarrow e_n g = \lambda e_n$,

jollakin $\lambda \in \mathbb{C}$.

Siis: g:n n:s riv on muotoa $(0, \dots 0, \lambda)$.

Toisaalla alkioihin $\mathrm{diag}(e^{i\theta}, \dots, 1, \dots, e^{i\theta})$ saadaan g diagonaaliseen $\Rightarrow g \in T$.

3^0 $\underline{Sp(n)}$: Ol. g kommutoi alkioiden $\in T = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots e^{i\theta_n}) / \theta_i \in [0, 2\pi$

kanssa. Kuten $2^0 \Rightarrow g$ diagonaalinen: $g = \mathrm{diag}(q_1, \dots, q_n)$

$q_i \in H$. g kommutoi alkion $\mathrm{diag}(i, 1, \dots, 1) \in T$ kanssa:

$q_1 i = i q_1 \Rightarrow q_1 \in \mathbb{C}$. Samoin $q_i \in \mathbb{C}$ $\forall i = 1, \dots, n$.

$\Rightarrow g \in T$.

4^0 $SU(n)$: Os. tapaus $T = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{-i(\theta_1 + \theta_2)}) / \theta_1, \theta_2 \in [0,$

$SU(3)$:n maks. torus. Ol. g alkio, joka kommutoi $\forall$ T:n alkion kanssa. Erit. g kommutoi alkion $A = \mathrm{diag}(1, e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ $\in$

kanssa. $\Rightarrow$ A:n 1:n riv e_1:n muuttuu:

$e_1 g A = e_1 A g = e_1 g \Rightarrow A(e_1 g) = e_1 g \Rightarrow e_1 g = \lambda_1 e_1$

jollakin $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Permutoimalla A:n diagonaalialkioita

$\Rightarrow$ 2. riv $= \lambda_2 e_2$ ja 3. riv $= \lambda_3 e_3$. Siis g diagonaalinen $\Rightarrow g \in T$.

Vast. $SU(n)$ $\forall n \geq 3$.

Riittää os: $T = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) / \theta \in [0, 2\pi)\}$ $SU(2)$:n maks. torus. Aik. $Sp(1) \cong SU(2)$ isomorfismi, joka vie $Sp(1)$:n maks toruksen $SU(2)$:n maks. torukselle: $3^0 \Rightarrow$. $\square$

Edellä todistettiin vielä vahvempi tulos:

9.2.2. Lause Ol. $G \in \{SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)\}$ ja

T G:n standardi maksimaalinen torus. Tällöin

jokainen G:n alkio, joka kommutoi jokaisen T:n

alkion kanssa kuuluu T:n. Erityisesti: T on

G:n maksimaalinen abelin ryhmä (l. T ei

sisälly mihinkään suurempaan G:n vaihdannaiseen aliryhmään)

Sovelluksena lasketaan matriisiryhmän $G \in \{SO(n), U(n), Sp(n), SU$

keskus $Z(G) = \{g \in G \mid ga = ag \ \forall a \in G\}$.

9.2.3. Lause

(1) $Z(SO(2m)) = \{I, -I\}$ 2. kl. ryhmä

(2) $Z(SO(2m+1)) = \{I\}$ triviaali ryhmä

(3) $Z(U(n)) = \{e^{i\theta} \cdot I \mid \theta \in [0, 2\pi)\} \cong U(1)$

(4) $Z(Sp(n)) = \{I, -I\}$

(5) $Z(SU(n)) = \{\omega \cdot I \mid \omega^n = 1\}$ n:nen kl:n syklinen ryhmä

Huom $Z(SU(n)) = Z(U(n)) \cap SU(n)$

Tod: Edellä $9.2.2 \Rightarrow Z(G) \subset T$. Katsotaan tapaus

$G = U(n)$ (muut. HT):

Ol. $g \in Z(U(n)) \Rightarrow g \in T: \ g = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

g kommutoi silloin $A := \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \dots 1\right) \in U(n)$ kanssa:

$\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3, \dots, \lambda_n\right) = gA = Ag = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3, \dots \lambda_n\right)$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

Vast. argumentilla mv. parin $\Rightarrow g = \mathrm{diag}(\lambda, \dots, \lambda) = \lambda \cdot I$

jolloin $\lambda \in \mathbb{C}$ $|\lambda| = 1$. □.

9.2.4. Seuraus

(1) $SU(2)$ ei ole isomorfinen $SO(3)$:n kanssa.

(2) $SU(n) \times U(1)$ ei isomorfinen $U(n)$:n kanssa $(n \geq 2)$.

Tod: keskukset eivät isomorfiset. □.

Huomautus: $SU(2)$:lla ja $SO(3)$:lla isomorfiset Lien algebrat.

Ak: 2-1 homomorfismi $SU(2) \to SO(3)$, joka lokaali diffeo, 9.2.5 $\Rightarrow$ 2-1 ei voida korvata 1-1 kuvauksella.

Pari $SU(n) \times U(1)$ ja $U(n)$ diffeomorfiset (HT) mutta ryhmästruktuuri ei voi säilyä. Kuitenkin löytyy n-1 homomorfismi $SU(n) \times U(1) \to U(n)$, joka lokaali diffeomorfismi (HT), ja niiden Lien algebrat ovat isomorfiset.

9.3. Maksimaalisen toruksen konjugaatit

Edellä konstruoidut standardit maksimaaliset torukset ovat aidosti ryhmien $SO(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$, $SU(n)$ maksimaalisia toruksia.

9.3.1. Lause Jos T on matriisiryhmän G maksimaalinen torus, niin $\forall g \in G$

$$gTg^{-1} := \{gag^{-1} \mid a \in T\} \text{ on } G\text{:n maks. torus.}$$

Tod: konjugointi $C_g : G \to G$ $a \mapsto gag^{-1}$ on isomorfismi $\Rightarrow$ $C_g(T) = gTg^{-1}$ on isomorfinen T:n kanssa ja siis torus. Jos $\tilde{T} \subset G$ olisi korkeampi-ulotteinen torus, joka sisältää gTg^{-1}:n niin $C_g^{-1}(\tilde{T})$ olisi korkeampi-ulotteinen torus, joka sisältää T:n. Siis gTg^{-1} maksimaalinen. □.

Huom yleensä standardi maksimaalinen torus ei ole normaali aliryhmä, joten yleensä se eroaa konjugaatistaan. Os: konjugaatteja riittävästi peittämään koko ryhmä:

9.3.2. Lause Ol. $G \in \{SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)\}$ ja T G:n standardi maksimaalinen torus. Tällöin $\forall$ G:n alkio kuuluu johonkin gTg^{-1} jollakin $g \in G$.

<u>Huom</u> Tämä yleisempi tulos (ei tod.): Polkuyhtenäisen kompaktin matriisiryhmän maksimaalisen toruksen konjugaatit peittävät koko ryhmän.

L. 9.3.2. sanoo:

(a) $\forall x \in G$ pätee: $\exists\, g \in G$ s.e. $x \in gTg^{-1}$

tai ekvivalentisti

(b) $\forall x \in G$ $\exists\, g \in G$ s.e. $gxg^{-1} \in T$.

Esimerkiksi siis: $\forall x \in G$ voidaan konjugoida diagonaali tai lohkodiagonaali muotoon, joka vastaa standardin maksimaalisen toruksen muotoa.

Yhtälössä (b) g kannanvaihtomatriisi: lin. kuvaus R_x on esitetty matriisina $gxg^{-1} \in T$ orton. kannan $\{e_1 g, \dots, e_n g\}$ suhteen.

<u>Esim</u> $G = SO(3)$ $x \in SO(3)$ löytyy $g \in SO(3)$

s.e. $$gxg^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ jollakin $\theta \in [0, 2\pi)$

Tämä on kuvausta R_x esittävä matriisi kannassa $\{e_1 g, e_2 g, e_3 g\}$ ja R_x on kulman θ pyöritys $e_3 g$:n määräämän suoran suhteen.

Eksplisiittisesti:

$e_3(gxg^{-1}) = e_3 \Rightarrow (e_3 g)x = e_3 g$

$e_1(gxg^{-1}) = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2 \Rightarrow e_1 gx = \cos\theta\, e_1 g + \sin\theta\, e_2 g$

$e_2(gxg^{-1}) = (\cos\theta)e_2 - (\sin\theta)e_1 \Rightarrow e_2 gx = \cos\theta\, e_2 g - \sin\theta\, e_1 g$

Saadaan: $\forall$ $SO(3)$:n alkio esittää rotaatiota!

Vast. $SO(5)$: $y \in T$ R_y esittää kulman θ_1 kiertoa tasossa span$\{e_1, e_2\}$ ja samanaikaisesti kulman θ_2 –"– " span$\{e_3, e_4\}$. Lause 9.3.2. sanoo: $\forall$ $x \in SO(5)$ on y:n konjugaatti: löytyy $g \in SO(5)$ s.e. R_x esittää yhtäaikaista kiertoa tasossa span$\{e_1 g, e_2 g\}$ ja span$\{e_3 g, e_4 g\}$. Nämä tasot kohtisuorassa toisiaan vastaan, sillä $g \in SO(5)$. Vast $\forall$ $SO(n)$:n alkio esittää yhtäaikaista kiertoa keskenään kohtisuorissa tasoissa.

Os. ensin:

9.3.3. Lemma $\forall$ $A \in U(n)$ $\mathbb{C}^n$:llä ortonormaali kanta, joka koostuu R_A:n ominaisvektoreista.

Tod: Ol. $A \in U(n)$, $0 \neq \lambda_1 \in \mathbb{C}$:n R_A:n omin. arvo ja v_1 siihen liittyvä ominaisvektori (voi ol. $|v_1| = 1$)

Jos $\langle w, v_1 \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ jollakin $w \in \mathbb{C}^n$ niin myös $\langle R_A w, v_1 \rangle_{\mathbb{C}} = 0$, sillä $\langle wA, v_1 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle w, v_1 A^{-1} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle w, \frac{1}{\lambda_1} v_1 \rangle$
$= \langle w, v_1 \rangle_{\mathbb{C}} \frac{1}{\lambda_1} = 0.$

siis $R_A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ rajoittuu lin. kuvaukseksi

R_A: span $\{v_1\}^\perp \to$ span $\{v_1\}^\perp = \{w \in \mathbb{C}^n \mid \langle w, v_1 \rangle_{\mathbb{C}} = 0\}$

Toistetaan edellistä argumenttia tähän $\mathbb{C}^n$:n $(n-1)$-ul.

$\mathbb{C}$ v.a.a:n $\Rightarrow v_2 \in$ span $\{v_1\}^\perp$ $|v_2| = 1$ ominaisvektori

ja R_A: span $\{v_1, v_2\}^\perp \to$ span $\{v_1, v_2\}^\perp$ jatketaan n-kert

erikoistapaus lauseesta 8.3.2 $\Rightarrow$

9.3.4. Seuraus $\forall A \in U(n) \ \exists g \in U(n)$ s.e. gAg^{-1}

on diagonaalinen ja siis kuuluu $U(n)$:n maksimaali-seen tooruseen.

Tod: Ol. $\{v_1, \dots v_n\}$ $\mathbb{C}^n$:n ortn. kanta s.e. $R_A v_i = \lambda_i v_i$

$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ R_A:n ominaisarvot. Ol. g matriisi, jonka

i:s rivi $= v_i$ jolloin $e_i g = v_i \quad \forall i = 1, \dots n$

Huom: $g \in U(n)$. V: $gAg^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Väite tosi, sillä gAg^{-1} esittää lin. kuvausta R_A

kannassa $\{v_1, \dots, v_n\}$. Eksplisiittisesti: $\forall i = 1, \dots, n$:

$e_i (gAg^{-1}) = v_i A g^{-1} = \lambda_i v_i g^{-1} = \lambda_i e_i$ $\square$.

9.3.5. Seuraus $\forall A \in SU(n) \ \exists g \in SU(n)$ s.e.

gAg^{-1} diagonaalinen ja siis $SU(n)$:n standardin

maksimaaliseen tooruksen alkio.