9.3.4.

<u>Tod:</u> Ol. $A \in SU(n) \Rightarrow \exists\, g \in U(n)$ s.e. gAg^{-1} diagonaalinen. $\forall\, \theta \in [0, 2\pi)$ pätee

$$(e^{i\theta} g) A (e^{i\theta} g)^{-1} = gAg^{-1}$$

Voidaan siis valita θ s.e. $e^{i\theta} g \in SU(n)$ □.

9.3.6. <u>Seuraus</u> $\forall\, A \in Sp(n)\ \exists\, g \in Sp(n)$ s.e. gAg^{-1} diagonaalinen ja diagonaalin alkiot $\in \mathbb{C}$, jolloin $gAg^{-1} \in Sp(n)$:n standardi maksimaalinen torus.

<u>Tod:</u> Ol. $A \in Sp(n)$ $\quad \Psi_n : Sp(n) \to U(2n)$ injektiivinen homomorfismi

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n & \xrightarrow{g_n} & \mathbb{C}^{2n} \\ R_A \big\downarrow & & \big\downarrow R_{\Psi_n(A)} \\ \mathbb{H}^n & \xrightarrow{g_n} & \mathbb{C}^{2n} \end{array}$$

$\forall$ unitaarisella matriisilla ominaisvektori, jonka pituus $= 1$

$\Rightarrow \exists\, u_1 \in \mathbb{C}^{2n}$ s.e. $R_{\Psi_n(A)}(u_1) = \lambda_1 u_1$ jollakin $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ ja $|u_1| = 1 = |\lambda_1|$.

Ol. $v_1 := g_n^{-1}(u_1) \in \mathbb{H}^n$. V: $R_A v_1 = \lambda_1 v_1$!

$g_n(\lambda_1 v_1) = \lambda_1 g_n(v_1) = \lambda_1 u_1 = R_{\Psi_n(A)}(u_1) = g_n R_A(v_1)$.

Ol. $w \in \mathbb{H}^n$ s.e. pätee $\langle w, v_1 \rangle_{\mathbb{H}} = 0$. Tällöin myös $\langle R_A(w), v_1 \rangle_{\mathbb{H}} = 0$ (kuten $\mathbb{C}$:n tap. edellä)

$\Rightarrow R_A : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ rajoittuu $\mathbb{H}$-lin. kuvaukseksi

$(n-1)$-ulotteiseen $\mathbb{H}$-lin. v.a.:n $\operatorname{span}\{v_1\}^{\perp} = \{w \in \mathbb{H}^n \mid \langle w, v_1\rangle_{\mathbb{H}} = 0\}$

$\Rightarrow R_{\psi_n(A)} : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$ rajoittuu lin. kuvaukseksi

$g_n(\operatorname{span}\{v_1\})^{\perp}$. Toistamalla argumenttia n kertaa

saadaan $\mathbb{H}^n$:n ortonormaali kanta $\{v_1, \dots, v_n\}$ ja

kompleksiluvut $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $|\lambda_i| = 1$ s.e. $R_A(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$ $\forall i = 1, \dots, n$.

Jos $g \in Sp(n)$ s.e. $g = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ niin pätee

$gAg^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ kuten edellä.

9.3.7. <u>Lause</u> $\forall$ $A \in SO(n)$ $\exists$ $g \in SO(n)$ s.e. gAg^{-1} on $SO(n)$:n maksimaalisen torusen alkio.

<u>Tod</u>: Ol. $A \in SO(n)$. Tulkitaan $A \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$.

Tällöin $A \in SU(n)$ ja löytyy siis $v \in \mathbb{C}^n$ s.e. $vA = \lambda v$, jollakin $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. Nyt pätee $\bar{v} \in \mathbb{C}^n$ ja

$$\bar{v}A \overset{A \in SO(n)}{=} \bar{v}\bar{A} = \overline{vA} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v},$$ joten $\bar{v}$ on R_A:n ominaisarvoon $\bar{\lambda}$ liittyvä ominaisvektori.

<u>Tapaus</u> $1°$ $\lambda \in \mathbb{R}$ (jolloin $\lambda = \bar{\lambda} = \pm 1$)

Tällöin siis myös $\bar{v}$ on λ:n liittyvä ominaisvektori. Nyt

$$z_1 := \frac{v + \bar{v}}{|v + \bar{v}|} \in \mathbb{R}^n \quad \text{ja} \quad z_1 A = \lambda z_1$$ (omin. vektoreiden summa)

Tapaus 2° $\lambda \notin \mathbb{R}$ Merk $\lambda = e^{i\theta}$ ja $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Aset $\underline{X} = \omega + \overline{\omega}$ ja $\underline{Y} = i(\omega - \overline{\omega})$

Nyt $\underline{X}, \underline{Y} \in \mathbb{R}^n$ ja $\langle \underline{X}, \underline{Y} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \omega + \overline{\omega}, i(\omega - \overline{\omega}) \rangle$

$$= \underbrace{\langle \omega, i\omega \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle \omega, i\overline{\omega} \rangle}_{\shortparallel} + \underbrace{\langle \overline{\omega}, i\omega \rangle}_{= -\overline{\langle \omega, i\overline{\omega} \rangle}} - \underbrace{\langle \overline{\omega}, i\overline{\omega} \rangle}_{=0} = 0.$$

$$\langle \mathrm{Re}\,\omega + i\mathrm{Im}\,\omega, i(\mathrm{Re}\,\omega - i\mathrm{Im}\,\omega) \rangle$$

$$= \langle \mathrm{Re}\,\omega, i\mathrm{Re}\,\omega \rangle + \cancel{\langle \mathrm{Re}\,\omega, \mathrm{Im}\,\omega \rangle} - \cancel{\langle \mathrm{Im}\,\omega, \mathrm{Re}\,\omega \rangle} + \underbrace{\langle i\mathrm{Im}\,\omega, \mathrm{Im}\,\omega}_{=0}$$

Pätee $\underline{X}A = (\omega + \overline{\omega})A = e^{i\theta}\omega + e^{-i\theta}\overline{\omega}$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)\omega + (\cos\theta - i\sin\theta)\overline{\omega}$$

$$= \cos\theta(\omega + \overline{\omega}) + \sin\theta(i\omega - i\overline{\omega}) = (\cos\theta)\underline{X} + (\sin\theta)\underline{Y}.$$

Samoin $\underline{Y}A = i(\omega - \overline{\omega})A = ie^{i\theta}\omega - ie^{-i\theta}\overline{\omega}$

$$= i(\cos\theta + i\sin\theta)\omega - i(\cos\theta - i\sin\theta)\overline{\omega}$$

$$= \cos\theta(i(\omega - \overline{\omega})) + \sin\theta(-\omega - \overline{\omega}) = (\cos\theta)\underline{Y} - (\sin\theta)\underline{X}.$$

Tapauksessa 1° Olkoon $\Omega = \mathrm{span}(z_1) \subset \mathbb{R}^n$ ja tapauksessa 2° $\Omega := \mathrm{span}\{\underline{X}, \underline{Y}\} \subset \mathbb{R}^n$. Kummassakin tapauksessa Ω on R_A-invariantti: $R_A(w) \in \Omega \ \forall\, w \in \Omega$. Kuten aik. $\Omega^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, x \rangle = 0 \ \forall\, x \in \Omega\}$ ja voidaan toistaa argumenttia kuvaukseen $R_A|_{\Omega^\perp}$. Toistamalla tätä saadaan $\mathbb{R}^n$:n ortonormaali kanta

$$\{\underline{X}_1, \underline{Y}_1, \dots, \underline{X}_k, \underline{Y}_k, z_1, \dots z_l\}, \text{ missä } 2k + l = n.$$

Jos g matriisi, jonka rivit muodostuvat näistä kantavektoreista, niin pätee $gAg^{-1} = \mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_k}, \lambda_1, \dots \lambda_l)$

missä $\lambda_i = \pm 1 \quad \forall\, i = 1, \dots, l$. Uudelleen järjestelemällä

kantavektorit voidaan ol. negatiiviset λ_i:t ensin.

Näitä parillinen määrä, sillä $\det gAg^{-1} = \det A = 1$.

Kukin pari $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R_\pi$ rotaatio

$\Rightarrow gAg^{-1} \in T$.

Kanta ortonormaali, joten $g \in O(n)$. Jos $g \in SO(n)$ väite

selvä. Jos $g \in O(n) \setminus SO(n)$ asetetaan $a := \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \dots 1\right) \in O(n) \setminus SO(n)$

Nyt $ag \in SO(n)$ ja $aTa^{-1} = T$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \in T$$

Saadaan: $(ag)A(ag)^{-1} = a\underbrace{(gAg^{-1})}_{\in T}a^{-1} \in T$,

joten $ag \in SO(n)$ konjugoi A:n T:hin. $\square$.

9.4. Maksimaalisen toruksen Lien algebra

Ol. $G \in \{SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)\}$ ja $\mathfrak{g}$ sen Lien algebra. Ol. $T = T(G) \subset G$ G:n standardi maksimaalinen torus ja $\tau := \tau(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ T:n Lien algebra. Jos $\gamma(t) = \mathrm{diag}(R_{t\theta_1}, \dots, R_{t\theta_n})$

$$R_{t\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos t\theta_i & \sin t\theta_i \\ -\sin t\theta_i & \cos t\theta_i \end{pmatrix} \text{ niin}$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} R_{t\theta_i} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_i \\ -\theta_i & 0 \end{pmatrix}, \text{ joten saadaan}$$

$$\tau(so(2m)) = \left\{ \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & \theta_1 \\ -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \theta_m \\ -\theta_m & 0 \end{pmatrix} \right) \Big/ \theta_i \in \mathbb{R} \right\}$$

ja $\tau(so(2m+1)) = \left\{ \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & \theta_1 \\ -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \theta_m \\ -\theta_m & 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \Big/ \theta_i \in \mathbb{R} \right\}$

Vastaavasti

$$\tau(u(n)) = \{ \mathrm{diag}(i\theta_1, \dots, i\theta_n) \,/\, \theta_i \in \mathbb{R} \} = \tau(sp(n))$$

$$\tau(su(n)) = \{ \mathrm{diag}(i\theta_1, \dots, i\theta_{n-1}, -i(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1})) \,/\, \theta_i \in \mathbb{R} \}$$

<u>esim</u> $U(n)$:llä

$$e^{\mathrm{diag}(i\theta_1, \dots, i\theta_n)} = \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \in T(U(n))$$

T vaihdannainen $\Rightarrow$ τ vaihdannainen l. $[A, B] = 0$ $\forall A, B \in \tau$.

G:n alkiot konjugoituvat T:n alkioiksi $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$:n alkiot konjugoituvat τ:n alkioiksi:

<u>9.4.1 Lause</u> $\forall X \in \mathfrak{g}$ $\exists g \in G$ s.e. $Ad_g(X) \in \tau$.

Tod: Val $r > 0$ s.e. $\exp : \mathfrak{g} \to G$ in rajoittumakuvaus

$\exp|_{B_r}$ on diffeomorfismi. Riittää osoittaa väite $\forall \bar{X} \in \mathfrak{g}$, jolla $|\bar{X}| < r$ $\left(g(\lambda\bar{X})g^{-1} = \lambda \underbrace{g\bar{X}g^{-1}}_{\in \tau} \in \tau \right)$

Aik: $\exists\, g \in G$ s.e. $a := g e^{\bar{X}} g^{-1} \in T$, joten

$$e^{Ad_g(\bar{X})} = e^{g\bar{X}g^{-1}} = g e^{\bar{X}} g^{-1} = a \in T$$

Toisaalta $|Ad_g(\bar{X})| = |\bar{X}| < r$, joten $Ad_g(\bar{X}) \in \mathfrak{g}$ on 1-käs vektori, jonka pituus $< r$, joka kuvautuu exp funktiolla pisteeksi $a \in T$.

$\Rightarrow Ad_g(\bar{X}) \in \tau$. $\square$.

Huom 9.4.1 keskeinen lineaarialgebrassa:

$\forall$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{vinosymmetriset} \\ \text{'' hermiittiset} \\ \text{'' symplektiset} \end{array} \right\}$ matriisit konjugoitavissa diagonaali tai lohko-diagonaalimuotoon

9.4.2. Lause Kuvaus $\exp : \mathfrak{g} \to G$ on surjektio.

Tod: Selvästi $\exp : \tau \to T$ on surjektio.

$\forall\, g \in G$ gTg^{-1} on maksimaalinen torus, jonka Lien algebra on $Ad_g(\tau)$. Tällöin

$\exp|_{Ad_g(\tau)} : Ad_g(\tau) \to gTg^{-1}$ surjektio, sillä

$e^{Ad_g(\bar{X})} = g e^{\bar{X}} g^{-1}$ $\forall\, \bar{X} \in \tau$. Lisäksi nämä konjugaatit peittävät G:n (L. 9.3.2) $\square$.

9.5. SO(3):n muoto

Aik. $SO(3)$ ja $\mathbb{R}P^3$ diffeomorfiset. Toinen tapa:

$\exp : so(3) \to SO(3)$

Nähtiin: $f : \mathbb{R}^3 \to so(3)$ v.a. isomorfismi

$$f(a,b,c) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

Tässä identifikaatiossa

$$\begin{array}{ccc} Ad_g : so(3) & \to & so(3) \\ \uparrow f & & \uparrow f \\ L_g : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

vastaa kuvausta $\forall g \in SO(3)$ eli

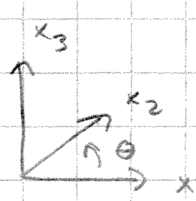
$$Ad_g(f(a,b,c)) = f(g \cdot (a,b,c))$$

9.5.1. **Lause** $\forall A \in so(3)$ $L_{(e^A)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on oikeakätinen kierto kulman $|A|/\sqrt{2}$ verran $f^{-1}(A)$:n määräämän akselin suhteen.

Tod: Ol. $A \in so(3)$. L. 9.4.1 $\Rightarrow$ $\exists\, g \in SO(3)$ s.e.

$$A = g \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \tau(so(3))} g^{-1} \quad \text{jollakin } \theta \in \mathbb{R}$$

huom $|A| = \sqrt{2}\,\theta$, joten $\theta = \frac{|A|}{\sqrt{2}}$



Pätee $\exp(A) = g \exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} g^{-1}$

$$= g \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} g^{-1},$$

eli $L_{(e^A)}$ oikeakätinen rotaatio kulman θ verran vektorin $g \cdot (0,0,1)$ määräämän suoran suhteen.

Huom. Pyörähdysakseli $g\cdot(0,0,1) =$

$$f^{-1}\left(\mathrm{Ad}_g(f(0,0,1))\right) = f^{-1}\left(\mathrm{Ad}_g\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\theta}f^{-1}(A). \quad \square.$$

9.5.2. Seuraus Ol. $B = \{A \in so(3) \mid |A| \leq \pi\sqrt{2}\}$

Tällöin $\exp|_B : B \to SO(3)$ on surjektio. Se ei ole injektio: $\forall\, A_1, A_2 \in B$ pätee:

$$\exp(A_1) = \exp(A_2) \iff A_1 = -A_2 \text{ ja } |A_1| = |A_2| = \pi\sqrt{2}$$

Tod: $\exp(B)$ sisältää matriisit, jotka esittävät kaikkia oikeakätisiä kiertoja $\mathbb{R}^3$:n vektoreiden suhteen kulmilla $\theta \in [0,\pi]$.

Huom: oikeakätinen kierto kulman θ verran A:n suhteen

= " " $-\theta$ " $-A$:n "

siksi $\exp(A) = \exp(-A)$ kun $|A| = \pi\sqrt{2}$. $\square$.

$SO(3)$:n pisteet 1-1 vastaavuudessa pisteiden $B/\sim$ kanssa, missä $\sim$ identifioi B:n reunapisteen sen antipodaalisen pisteen kanssa.

Huom. B homeomorfinen S^3:n ylemmän puolipallon

$$V = \{(x_0,x_1,x_2,x_3) \in S^3 \subset \mathbb{R}^4 \mid x_0 \geq 0\} \text{ kanssa}$$

$\mathbb{R}^4$:n origon kautta kulkevat suorat leikkaavat V:tä täsmälleen yhdessä pisteessä lukuunottamatta niitä suoria, jotka sisältyvät aliavaruuteen $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_0 = 0\}$.

$\Rightarrow \mathbb{R}P^3 \approx V/\sim_{\partial V}$ ($\sim_{\partial V}$: antipodaalisten pisteiden samastus).

9.6. Kompaktin matriisiryhmän rangi

Ol. $G \in \{SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)\}$ ja T G:n standardi maksimaalinen torus

9.6.1 Lause $\forall$ G:n maksimaalinen torus on muotoa gTg^{-1} jollakin $g \in G$.

Huom Väite pätee myös kun G polkuyhtenäinen ja kompakti matriisiryhmä. L. 9.6.1 todistus avaan sama myös yleisemmässä tilanteessa kun oletetaan tunnetuksi, että konjugaatit peittävät koko G:n.

Erityisesti siis G:n maksimaalisilla toruksilla on sama dimensio, joten voidaan asettaa:

Määritelmä G:n rangi on maksimaalisen toruksen dimensio.

$$\operatorname{rank}(SO(2n)) = \operatorname{rank}(SO(2n+1)) = \operatorname{rank} U(n)$$

$$= \operatorname{rank}(Sp(n)) = \operatorname{rank}(SU(n+1)) = n.$$

Huom isomorfisilla ryhmillä on sama rangi, joten se on hyödyllinen invariantti osoitettaessa ryhmiä keskenään epäisomorfisiksi.

Ennen L. 9.6.1 todistusta todistetaan hyödyllinen lemma:

9.6.2. <u>Lemma</u> $\forall\ n\ \exists\ a \in T^n$ s.e. joukko

$\langle a \rangle$ on tiheä T^n:ssä e. $\overline{\langle a \rangle} = T^n$

Sanotaan: a on toruksen <u>topologinen generaattori</u>

<u>Tod</u>: Voidaan olettaa: $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ ja tarkastellaan

alkioita muodossa $[x_1, \dots, x_n] = (x_1, \dots, x_n) + \mathbb{Z}^n$.

$\varepsilon > 0$ sivuinen T^n:n kuutio on osajoukko

$$C([u_1, \dots, u_n], \varepsilon) = \{ [x_1, \dots, x_n] \in T \mid \forall\ k : |x_k - u_k| < \tfrac{\varepsilon}{2} \}$$

jollakin $[u_1, \dots u_n] \in T^n$. $\forall$ T^n:n kuutio on jonkin

$\mathbb{R}^n$:n kuution kuvajoukko projektiossa $\pi : \mathbb{R}^n \to T^n$.

Olk. $C_0 \subset T^n$ $\varepsilon > 0$ sivuinen kuutio. Tarkastellaan

vähenevää jonoa ε_k-sivuisia kuutioita

$$C_0 \supset C_1 \supset \dots \supset C_m \quad , \quad \text{missä } \forall\ k = 1, 2, \dots, m$$

löytyy kokonaisluku N_k s.e. $N_k \varepsilon_{k-1} > 1$ ja

$N_k C_k \subset U_k$, missä $\{U_i\}$ valittu T^n:n

topologian numeroituva kanta. (Voi ol. T^n:ssä

projektion $\pi : \mathbb{R}^n \to T^n$ indusoima topologia

$U \subset_o T^n \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subset_o \mathbb{R}^n$) Val. N_{m+1} niin suuri,

että $N_{m+1} C_m = T^n$. Sitten val. ε_{m+1}-sivuinen kuutio $C_{m+1} \subset C_m$

s.e. $N_{m+1} C_{m+1} \subset U_{m+1}$. Jos nyt $z = [z_1, \dots, z_n] \in \bigcap_{k \geq 1} C_k$,

niin $N_k z \in U_k$ $\forall\ k$ $\Rightarrow \overline{\langle z \rangle} = T^n$, sillä

$\forall\, p \in T^n$ ja $\forall$ p:n ympäristöllä U löytyy topologian kannan joukko U_k s.e $p \in U_k \subset U$. Pienentämällä ympäristöä U löydetään jono $\langle a \rangle$:n pisteitä, jotka kasautuvat pisteeseen p. $\square$.

<u>Tod</u> (9.6.1): Olk. $T' \subset G$ maksimaalinen torus. Val $a \in T'$ s.e. $\langle a \rangle$ tiheä T':ssa. Val. $g \in G$ s.e. $gag^{-1} \in T$. T aliryhmä joten $(gag^{-1})^n = ga^n g^{-1} \in T$ $\forall n$ $\Rightarrow$ tiheä joukon $gT'g^{-1}$ osajoukko sisältyy T:hin. T suljettu, joten $gT'g^{-1} \subset T$. Toisaalta T' oli maksimaalinen $\Rightarrow$ $gT'g^{-1}$ maksimaalinen

$\Rightarrow gT'g^{-1} = T$ $\square$.