8.6. Peitekuvaus $Sp(1) \to SO(3)$

Tarkastellaan $Sp(1)$:n adjungoitua operointia

$$Ad : Sp(1) \to O(3)$$
$$g \longmapsto Ad_g : sp(1) \to sp(1) = \operatorname{span}\{(i),(j),(k)\}$$

L.8.4.1 $\Rightarrow$ $Ad_g \in O(3) \quad \forall\, g \in Sp(1)$

Lisäksi: $Sp(1)$ polkuyhtenäinen, Ad jatkuva $\Rightarrow$

$Ad(Sp(1))$ polkuyhtenäinen, joten

$$Ad : Sp(1) \to SO(3) \qquad (Ad_I = I \in SO(3))$$

sileä homomorfismi. Osoitetaan, että $Ad : Sp(1) \to SO(3)$

2-1 surjektio $\left(\text{t. } Ad^{-1}(p) = \{p_1, p_2\} \quad \forall\, p \in SO(3) \right)$

ja <u>lokaali diffeomorfismi</u> t. $\forall\, g \in Sp(1)\ \exists$

g:n ympäristö U s.e. rajoittumakuvaus $Ad|_U : U \to Ad(U)$

on diffeomorfismi.

Olk. $g \in Sp(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$, $v \in sp(1) = \operatorname{span}\{(i),(j),(k)\}$

$$Ad_g(v) = gvg^{-1} \in sp(1).$$

<u>Huom</u>: kuvaus $a \mapsto gag^{-1}$ $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ on isometria, joka pitää suoran $\operatorname{span}\{1\}$ invarianttina, joten erityisesti se pitää avaruuden $sp(1) = \operatorname{span}\{(i),(j),(k)\}$ invarianttina. Voidaan siis ajatella: $Sp(1)$:n adjungoitu operointi on puhtaasti imaginaaristen kvaternioiden konjugointia.

8.6.1. Lemma $\ker(Ad) = \{1, -1\}$

Tod: Olk. $g \in \ker(Ad) \Rightarrow g v g^{-1} = v \quad \forall v \in sp(1)$

Siis: g kommutoi kaikkien puhtaasti imaginaaristen kvaternioiden kanssa $\Rightarrow$ g kommutoi kaikkien kvaternioiden kanssa $\overset{g \in Sp(1)}{\Rightarrow}$ $g \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $g = \pm 1$. □.

Saatiin: Ad homomorfismi $\Rightarrow$ Jos $p \in Ad(Sp(1))$, niin $Ad^{-1}(p) = \{p_1, p_2\}$.

8.6.2. Lemma Ad on lokaali diffeomorfismi pisteessä I l. $Ad|_U : U \to Ad(U)$, diffeomorfismi kun $U \ni I$ riittävän pieni ympäristö.

Tod: Käänteiskuvauslause $\Rightarrow$ Riittää osoittaa, että $d(Ad)_I : sp(1) \to so(3)$ bijektio. Näytetään, että $d(Ad)_I \{(i), (j), (k)\}$ on $so(3)$:n kanta:

Olk. $\gamma_1(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t \in Sp(1)$

$\gamma_1(0) = I$ ja $\gamma_1'(0) = i$

$\forall v \in sp(1) = \mathrm{span}\{(i), (j), (k)\}$ pätee

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\gamma_1(t)}(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{it} v e^{-it} = iv - vi = \begin{cases} 0, & v = i \\ 2k, & v = j \\ -2j, & v = k \end{cases}$$

Saatiin: $d(Ad)_I(i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Vastaavasti: $\gamma_2(t) = \cos t + j\sin t \in Sp(1)$ $\quad \gamma_2(0) = I$, $\gamma_2'(0) = j$

$\forall\, \sigma \in sp(1)$:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\gamma_2(t)}(\sigma) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\cos t + j\sin t)\,\sigma\,(\cos t - j\sin t)$$

$$= j\sigma - \sigma j = \begin{cases} -2k, & \sigma = i \\ 0, & \sigma = j \\ 2i, & \sigma = k \end{cases} \quad \text{ja} \quad d(Ad)_I(j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Samoin: $\gamma_3(t) = \cos t + k\sin t \in Sp(1)$ $\quad \gamma_3(0) = I$, $\gamma_3'(0) = k$

$\forall\, \sigma \in sp(1)$:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\gamma_3(t)}(\sigma) = k\sigma - \sigma k = \begin{cases} 2j, & \sigma = i \\ -2i, & \sigma = j \\ 0, & \sigma = k \end{cases}$$

$$\text{ja} \quad d(Ad_I)(k) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Saadaan: $\{ d(Ad_I)(i), d(Ad_I)(j), d(Ad_I)(k) \}$

$so(3)$:n kanta. $\square$.

Harj. 6.2 $\Rightarrow$ Ad lokaali diffeo $\forall\, g \in Sp(1)$.

Os seuraavaksi $Ad: Sp(1) \to SO(3)$ surjektio. Tämä

on yllättävää, sillä kuvapisteet $sp(1)$:n Lien algebraisomorfismeja!

Toisaalta: $SO(3)$:n matriisit säilyttävät $\mathbb{R}^3$:n ristitulon

$=$ $sp(1)$:n hakasulo.

8.6.3. <u>Lemma</u> $Ad : Sp(1) \to SO(3)$ surjektio.

<u>Tod</u>: $Sp(1)$ kompakti $\to$ $Ad(Sp(1))$ kompakti

ja siis suljettu. Toisaalta $Ad(Sp(1))$ avoin koska

lokaalisti diffeomorfismi. Koska $SO(3)$ polkuyhtenäinen

niin $Ad(Sp(1)) = SO(3)$. $\square$.

<u>Huom.</u> Saatiin selitys, miksi $Sp(1)$:llä ja $SO(3)$:lla

isomorfiset Lien algebrat

Algebrallisesti: $SO(3) \triangleq Sp(1)/\{-I,I\}$, sillä

$\{-I,I\}$ $Sp(1)$:n normaali aliryhmä

$$Sp(1)/_{\{-I,I\}} = \{\{-a,a\} \mid a \in Sp(1)\}$$

Geometrisesti: $SO(3)$ diffeomorfinen 3-ul.

reaalisen projektiivisen avaruuden $\mathbb{R}P^3$ kanssa:

<u>Määritelmä</u> $\mathbb{R}^{n+1}$:n origon kautta kulkevien suorien

avaruus on <u>n-ulotteinen reaalinen projektiivinen</u> avaruus.

<u>Huom.</u> $\mathbb{R}^{n+1}$:n origon kautta kulkevat suorat leikkaavat

palloa S^n antipodaalisessa pisteissä. Usein

samastetaan $p \in \mathbb{R}P^n$ S^n:n antipodaalisen

parin kanssa. Identifikaatio $SO(3) \cong Sp(1)/_{\{-I,I\}}$

liittää kuhunkin $SO(3)$:n pisteeseen antipodaalisen pään pallolla $S^3 \cong Sp(1)$ ja siis välittää

bijektion $SO(3) \to \mathbb{R}P^3$.

Huom. Voidaan osoittaa $\mathbb{R}P^n$ on n-monisto

Tässä identifioitiin $\mathbb{R}P^3$ ja $SO(3)$, josta

jälkimmäinen tiedetään 3-monistoksi.

Aik. Harj. 5.6 : $SO(3) \cong T^1S^2$ diffeomorfiset

8.6.4. Lause Mitkään 3-monistoista (1), (2), (3)

eivät ole keskenään diffeomorfisia:

(1) $T^1S^2 \cong SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$

(2) $S^3 \cong Sp(1) \cong SU(2)$

(3) $S^2 \times S^1$

Tod: Monistoilla (1), (2), (3) eri perusryhmät

(1) $\mathbb{Z}_2$ (2) $\{0\}$ (3) $\mathbb{Z}$ (ks. esim Armstrong: Basic Topology) $\square$.

Huom 1° (2) $\not\cong$ (3) tuttu ilmiö konkonemisnäöreille!
(vrt. Harj. 6.5 : $T^1S^3 \cong S^3 \times S^2$)

2° $Ad : Sp(1) \to SO(3)$ äärellisten ryhmien generoinnissa:

Jos $H \subset SO(3)$ äärellinen aliryhmä, niin

$Ad^{-1}(H) := \{ q \in Sp(1) \mid Ad_q \in H \}$ $Sp(1)$:n äärellinen

aliryhmä, jonka kertaluku $= 2 \times H$:n kertaluku.

Esim. $H \subset SO(3)$ ikosaedrin (tai dodekaedrin) suora symmetriaryhmä $\cong A_5$. Tällöin $H^* := Ad^{-1}(H) \subset Sp(1)$ (kl 120) on binäärinen ikosaedriryhmä ja $Sp(1)/H^*$ on Poincarén homologiapallona tunnettu 3-monisto.

8.7. Muita kaksinkertaisia peitekuvauksia

Voidaan osoittaa: $\forall n > 2$ löytyy matriisiryhmä, joka peittää kaksinkertaisesti $SO(n)$:n : $\left(\dim SO(n) = \frac{n(n-1)}{2} \right)$

$$
\begin{aligned}
Sp(1) &\to SO(3) \\
Sp(1) \times Sp(1) &\to SO(4) \\
Sp(2) &\to SO(5) \\
SU(4) &\to SO(6) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Yl. Merk. $Spin(n) \to SO(n)$ kaksinkertainen peitekuvaus. $Spin(n)$ on n-ulotteinen spinryhmä

Siis:

$$
\begin{aligned}
Spin(3) &= Sp(1) \\
Spin(4) &= Sp(1) \times Sp(1) \\
Spin(5) &= Sp(2) \\
Spin(6) &= SU(4)
\end{aligned}
$$

Kun $n > 6$ $spin(n)$ ei mikään alemmin kurssilla esiintyneistä matriisiryhmistä (kts. esim Curtis: Matrix groups).

Kaksinkertaiset peitekuvaukset ylä ryhmähomomorfismeja $\Rightarrow$ $gl(spin(n)) \cong gl(SO(n))$:

$sp(1) \cong so(3)$

$sp(1) \times sp(1) \cong so(4)$ ← 4-monistojen teoria, Yang-Mills

$sp(2) \cong so(5)$ konnektiot, hiukkasfysiikka, ...

$su(4) \cong so(6)$

Tarkastellaan vielä kuvausta $F : Sp(1) \times Sp(1) \to SO(4)$

$Sp(1) \times Sp(1)$ kahden matriisiryhmän tulona matriisiryhmä.

Kaksinkertainen peitekuvaus määräytyy ehdosta: $(g_1, g_2) \in Sp(1) \times Sp(1)$

$v \in \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$, $\quad F(g_1, g_2)(v) = g_1 v \bar{g}_2$

Kuten edellä: - $F(Sp(1) \times Sp(1)) = SO(4)$

- $v \mapsto g_1 v \bar{g}_2$ $\mathbb{H}$:n isometria

- $Sp(1) \times Sp(1)$ polkuyhtenäinen, kompakti

- $\ker F = \{(I,I), (-I,-I)\}$

$$\Rightarrow SO(4) \cong Sp(1) \times Sp(1) \big/ \{(I,I),(-I,-I)\}$$

Kuvaus $dF_{(I,I)} : sp(1) \times sp(1) \to so(4)$ Lien

algebraisomorfismi:

$$dF_{(I,I)}(ai + bj + ck, xi + yj + zk) = \begin{pmatrix} 0 & -a-x & -b-y & -c-z \\ a+x & 0 & -c+z & b-y \\ b+y & c-z & 0 & -a+x \\ c+z & -b+y & a-x & 0 \end{pmatrix}$$

evaluoimalla kanta-alkioilla. Esim.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(e^{it}, 1)(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{it} v = iv = \begin{cases} i, & v = 1 \\ -1, & v = i \\ k, & v = j \\ -j, & v = k \end{cases},$$

mistä $dF_{(I,I)}(i, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vast. $(j,0)$, $(k,0)$, $(0,i)$, $(0,j)$, $(0,k)$.

9. Maksimaaliset torukset

Onko jokainen $SO(3)$:n alkio kierto jonkin akselin suhteen?

Yleisemmin: karakterisoidaan $SO(n)$:n, $SU(n)$:n, $U(n)$:n ja $Sp(n)$:n alkiot. Jokainen näiden matriisiryhmien alkio on yhtäaikainen rotaatio keskenään ortogonaalisten tasojen kokoelmassa. Tämän karakterisoinnin avulla todistetaan:

9.0.1. Lause Ol. $G \in \{SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)\}$

(1) $\forall$ G:n alkio on muotoa e^{X} jollakin $X \in \mathfrak{g}$.

(2) G on polkuyhtenäinen.

Huom $(1) \Rightarrow (2)$, sillä $\forall$ G:n alkio yhdistettänssä identtiseen alkioon 1-parametriryhmän kautta.

Osoittautuu: (1) pätee $\forall$ kompakteilla, polkuyhtenäisillä matriisiryhmillä, muttei päde monilla epäkompakteilla, polkuyhtenäisillä matriisiryhmillä kuten $SL_2(\mathbb{R})$, $SL_2(\mathbb{C})$. (kts. esim. Rossmann).

Maksimaalisten torusten avulla myös: kompaktin, polkuyhtenäisen G alkion x kanssa kommutoivien alkioiden kokoelman määrääminen eksplisiittisesti.

Samoin: keskuksen $Z(G)$ määrääminen

$$Z(G) = \{ a \in G \mid ga = ag \ \forall g \in G \}$$

Osoitetaan mm. että $SO(3)$ ja $SU(2) \cong Sp(1)$ eivät isomorfisia näyttämällä, että niiden keskukset eivät isomorfisia.

9.1. Toruksen karakterisointeja

Määritellään torus ja osoitetaan, että ne ovat ainoat polkuyhtenäiset, kompaktit, vaihdannaiset matriisiryhmät.

Aik: $U(1) = \{ (e^{i\theta}) \mid \theta \in [0, 2\pi) \}$ ympyräryhmä.

$U(1) \cong SO(2)$ vaihdannainen, polkuyhtenäinen

Määritelmä n-ulotteinen torus T^n on matriisiryhmä

$$T^n := U(1) \times \dots \times U(1) \qquad (n \text{ kopiota}).$$

Yleisesti: Jos $G_1, \dots, G_n$ matriisiryhmiä $G_i \subset GL_{m_i}(\mathbb{K})$, niin $G_1 \times \dots \times G_n \subset GL_{m_1 + \dots + m_n}(\mathbb{K})$ matriisiryhmä.
$\cong \{ \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_n) \mid A_i \in G_i \}$.

Tässä: $T^n \cong \{ \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in [0, 2\pi) \} \subset GL_n(\mathbb{C})$.

Toinen tapa: Aik. $(\mathbb{R}^n, +) \cong \mathrm{Trans}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \middle| v \in \mathbb{R}^n \right\}$

Olk. $a_1, \dots, a_k \in G$. Merk $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \subset G$ näiden alkioiden generoima aliryhmä (= alkioiden a_i ja niiden käänteisalkioiden a_i^{-1} äärelliset tulot).

Esim. Jos $\{v_1,\dots,v_k\} \subset (\mathbb{R}^n,+)$, niin

$$\langle v_1,\dots,v_k\rangle = \{n_1v_1+\dots+n_kv_k \mid n_i \in \mathbb{Z}\}.$$

$(\mathbb{R}^n,+)$ vaihdannainen $\Rightarrow$ $\forall$ aliryhmä $N \subset (\mathbb{R}^n,+)$ normaali

$\Rightarrow$ $(\mathbb{R}^n,+)/N$ ryhmä.

9.1.1. <u>Lause</u> Jos $\{v_1,\dots v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ kanta, niin tekijäryhmä $(\mathbb{R}^n,+)/\langle v_1,\dots,v_n\rangle$ isomorfinen n-toruksen T^n kanssa.

<u>Tod</u>: Os. ensin $\mathbb{R}^n$:n standardille kannalle:

$f:(\mathbb{R}^n,+)\to T^n$ homomorfismi:

$$f(t_1,\dots,t_n) := \mathrm{diag}\left(e^{2\pi i t_1},\dots,e^{2\pi i t_n}\right)$$

on surjektio. $\ker f = \{v\in\mathbb{R}^n \mid f(v)=I\}$

$= \{v=(t_1,\dots t_n) \mid e^{2\pi i t_k}=1 \quad \forall k=1,..n\}$

$= \{v \mid t_k = m_k,\ m_k\in\mathbb{Z} \quad k=1,\dots,n\} = \langle e_1,\dots,e_n\rangle$

$\Rightarrow$ $T^n = (\mathbb{R}^n,+)/\ker f = (\mathbb{R}^n,+)/\langle e_1,\dots,e_n\rangle$

(ryhmähomomorfismien peruslause: $f: G_1\to G_2$ homomorfismi $\Rightarrow$ $\tilde{f}: G_1/\ker f \to f(G_1)$, $\tilde{f}(g\ker f) := f(g)$ on isomorfismi)

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & f(G) \\ G/\ker f \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\tilde{f}\circ\pi = f$

$\pi: G \to G/\ker f$
$g \mapsto g\ker f$

Ol. $\{v_1,\dots,v_n\}$ $\mathbb{R}^n$:n mv. kanta ja

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R}) \quad \text{t.} \quad R_A(e_i) = v_i$$

$R_A : (\mathbb{R}^n, +) \to (\mathbb{R}^n, +)$ isomorfismi, joka vie e_i:n

virittämät aliryhmät v_i:n virittämiksi aliryhmiksi

$\Rightarrow \quad (\mathbb{R}^n,+)/\langle v_1,\dots,v_n\rangle \cong (\mathbb{R}^n,+)/\langle e_1,\dots e_n\rangle = T^n$. □

9.1.2. <u>Seuraus</u> Jos $\{v_1,\dots,v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ lin. riippumaton,

niin $(\mathbb{R}^n,+)/\langle v_1,\dots,v_k\rangle$ isomorfinen $T^k \times (\mathbb{R}^{n-k},+)$:n

kanssa.

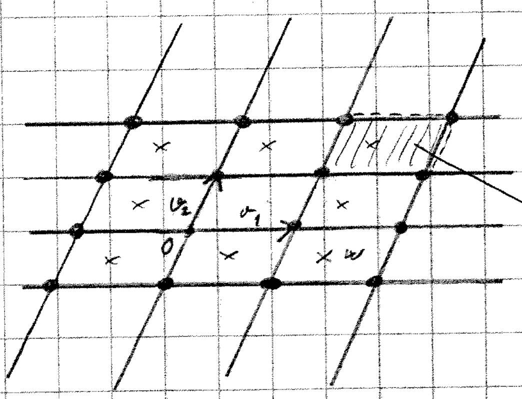
<u>Tod</u>: Täydennetään $\{v_1,\dots,v_k\}$ $\mathbb{R}^n$:n kannaksi vektoreilla

$v_{k+1},\dots,v_n$. Tällöin $(\mathbb{R}^n,+)/\langle v_1,\dots,v_k\rangle$

$\cong (\text{span}\{v_1,\dots v_k\},+)/\langle v_1,\dots,v_k\rangle \times (\text{span}\{v_{k+1},\dots v_n\},+)$

$\cong T^k \times (\mathbb{R}^{n-k},+)$. □

$\mathbb{R}^2$:



$\langle v_1,v_2\rangle \subset \mathbb{R}^2$ hilan kärkipisteet

$\mathbb{R}^2/\langle v_1,v_2\rangle = \{(a,b)+\langle v_1,v_2\rangle \mid a,b\in\mathbb{R}$

perusalue D

- tyypillisen pisteen $w = t_1v_1 + t_2v_2$ $t_i \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ määräämä tekijäjoukko $w+\langle v_1,v_2\rangle$ koskettaa perusaluetta täsmälleen yhdessä pisteessä
- $w \in \langle v_1,v_2\rangle$: $(w+\langle v_1,v_2\rangle)\cap D = 4$ pistettä
- $w = tv_1 + nv_2$ tai $w = nv_1 + tv_2$, $n\in\mathbb{Z}$, $t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$
  $(w+\langle v_1,v_2\rangle)\cap D = 2$ pistettä

Seuraus: T^n kompakti, vaihdannainen, polkuyhtenäinen

Nämä ominaisuudet karakterisoivat toruksen:

9.1.3. Lause Kompakti, vaihdannainen, polkuyhtenäinen matriisiryhmä G on isomorfinen toruksen kanssa.

Tod: Ol. $\mathfrak{g}$ G:n Lien algebra. G vaihdannainen

$\Rightarrow AB = BA$ ja $e^A e^B = e^{A+B}$ $\forall A, B \in \mathfrak{g}$

$\Rightarrow \exp : \mathfrak{g} \to G$ on ryhmähomomorfismi kun tulkitaan $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}, +)$. Olk. $K = \ker(\exp) \subset \mathfrak{g}$.

K on $\mathfrak{g}$:n diskreetti aliryhmä i. origolla (= id alkio) on ympäristö $U \subset \mathfrak{g}$ s.e. $U \cap K = \{0\}$. Voidaan valita U siten, että $\exp|_U$ on diffeomorfismi.

$\Rightarrow$ $\forall v \in K$ on $\mathfrak{g}$:ssä ympäristö, joka separoi sen kaikista muista K:n alkioista: $v + U := \{v + u \mid u \in U\}$.

V: $K = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ jollakin lineaarisesti riippumattomalla joukolla $\{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathfrak{g}$ s.e. $k \leq \dim \mathfrak{g}$.

Yksinkertaisuuden vuoksi tarkastellaan tilannetta $\dim \mathfrak{g} = 2$ (yleinen tapaus analogisesti)

Olk. $0 \neq v_1 \in K$, jolla pienin mahdollinen normi (löytyy diskreettisyyden nojalla)

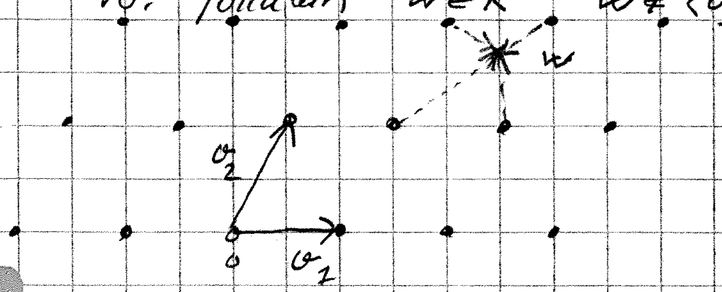
Jos $\langle v_1 \rangle = K$ niin väite selvä ja $k=1$. Muuten

valitaan $v_2 \in K$, jolla pienin normi joukossa $K \setminus \langle v_1 \rangle$.

K aliryhmä $\Rightarrow$ $\langle v_1, v_2 \rangle \subset K$

V: $\langle v_1, v_2 \rangle = K$.

Vo: jollakin $w \in K$ $w \notin \langle v_1, v_2 \rangle$.



Tällöin kuvan neljä vektoria (-----) kuuluvat K:n ja jokin niistä lyhyempi kuin v_1 tai v_2 ↯.

Os. $\exp : \mathfrak{g} \to G$ surjektio:

Kuvajoukko $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$ sisältää G:n identiteettialkion I ympäristön V. $\exp(\mathfrak{g})$ G:n aliryhmä, joten myös joukolle $\langle V \rangle$, joka koostuu kaikista äärellisen monen V:n alkion ja käänteisalkion tuloista pätee $\langle V \rangle \subset \exp(\mathfrak{g})$.

Osoitetaan: $\langle V \rangle = G$:

G polkuyhtenäinen, joten riittää os $\langle V \rangle$ avoin ja suljettu G:ssä.

$\langle V \rangle$ avoin G:ssä: $\forall g \in \langle V \rangle$ joukko $gV := \{ga \mid a \in V\}$ on g:n ympäristö G:ssä ja $gV \subset \langle V \rangle$.

$\langle V\rangle$ suljettu G:ssä: Olk. $g \in G$, $g_i \in \langle V\rangle$ s.e. $g_i \to g$

Tällöin g:n ympäristö gV sisältää pisteet g_i kun $i \geq i_0$

l. $g_i = ga_i$ joillakin $a_i \in V$ $i \geq i_0$

$\Rightarrow g = a_i^{-1} g_i \in V$.

Saatiin: $\exp : \mathfrak{g} \to G$ surjektiivinen homomorfismi, jonka ydin $= \langle v_1, \dots, v_k\rangle$. $\Rightarrow$

$G \cong \mathfrak{g} / \langle v_1, \dots, v_k\rangle \cong T^k \times (\mathbb{R}^{d-k}, +)$, missä

$d = \dim \mathfrak{g}$. G kompakti $\Rightarrow d = k$. $\square$.

9.1.4. <u>Seuraus</u> Jokainen vaihdannainen polkuyhtenäinen matriisiryhmä on isomorfinen avaruuden $T^k \times (\mathbb{R}^m, +)$ kanssa joillakin $k, m \in \mathbb{Z}$, $k, m \geq 0$.

9.2. <u>Matriisiryhmien $SO(n)$, $SU(n)$, $U(n)$ ja $Sp(n)$ standardi maksimaalinen torus ja keskus</u>

<u>Määritelmä</u> Ol. G matriisiryhmä. <u>G:n torus</u> on G:n aliryhmä, joka isomorfinen toruksen kanssa.

<u>G:n maksimaalinen torus</u> on G:n torus, joka ei sisälly G:n korkeampiulotteiseen torukseen.

Jokainen matriisiryhmä G sisältää ainakin yhden maksimaalisen toruksen: Aliryhmä $\{I\} \subset G$ on