jonka eksponenttifunktiosta on kysymys. Lopputuloksena syntyvää lin. kuvausta $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ merkitään symbolilla e^{ad_X}. Lopputulos on riippumaton kannan $\mathcal{B}$ valinnasta ($e^{ABA^{-1}} = Ae^{B}A^{-1}$!)

Formaalisti: $\forall\, Y \in \mathfrak{g}$:

$$(e^{\mathrm{ad}_X})(Y) = \left(I + \mathrm{ad}_X + \tfrac{1}{2}(\mathrm{ad}_X)^2 + \tfrac{1}{6}(\mathrm{ad}_X)^3 + \dots\right)Y$$

$$= Y + [X,Y] + \tfrac{1}{2}[X,[X,Y]] + \tfrac{1}{6}[X,[X,[X,Y]]] + \dots$$

Lause 8.2.3 siis sanoo: kun $g = e^X$, niin $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ lausutaan X:n kanssa otettujen peräkkäisten Lien hakasulkujen avulla.

<u>Tod</u> (8.2.3): Idea: $\forall\, X \in \mathfrak{g}$ $\quad d(\mathrm{Ad})_I(X) \in gl_d(\mathbb{R})$ on kuvausta ad_X vastaava matriisi. Kirj. lyhyesti $d(\mathrm{Ad})_I(X) = \mathrm{ad}_X$. Tämä seuraa Lien hakasulun määritelmästä tai eksplisiittisesti:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}_{e^{tX}}(Y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(e^{tX} Y e^{-tX}\right) = XY - YX = \mathrm{ad}_X(Y).$$

$\mathrm{Ad} : G \to Gl_d(\mathbb{R})$ sileä homomorfismi $\overset{HT}{\Longrightarrow}$ $\forall\, X \in \mathfrak{g}$ pätee $\quad \mathrm{Ad}_{e^X} = e^{d(\mathrm{Ad})_I(X)} = e^{\mathrm{ad}\, X}$. $\square$.

<u>Huom.</u>

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}_1 \arrow[r, "(dF)_I"] & \mathfrak{g}_2 \arrow[d, "\exp"] \\ G_1 \arrow[r, "f = \mathrm{Ad}", "\text{homom}"'] & G_2 \end{tikzcd}$$

8.3. SO(3):n adjungoitu operaatio

$$\mathrm{Ad} : SO(3) \longrightarrow GL_3(\mathbb{R})$$
$$g \longmapsto \mathrm{Ad}_g : so(3) \to so(3)$$

Esitetään lineaarikuvaus $\mathrm{Ad}_g : so(3) \to so(3)$ matriisina

$A : L_A = \mathrm{Ad}_g$, $A \in GL_3(\mathbb{R})$ kun $so(3)$:lla kiinnitetään

kanta

$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pätee : $[E_1, E_2] = E_3$, $[E_2, E_3] = E_1$, $[E_3, E_1] = E_2$

Kanta $\mathcal{B}$ määrää vektoriavaruuksien välisen isomorfismin

$$f : \mathbb{R}^3 \to so(3) : f(1,0,0) = E_1,\ f(0,1,0) = E_2,\ f(0,0,1) = E_3$$
$$(a,b,c) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Nähdään pian !

$\forall\, g \in SO(3)$ $\quad \mathrm{Ad}_g : so(3) \to so(3)$ $\quad$ pätee

$$g \cdot f(a,b,c) g^{-1} = f(g \cdot (a,b,c))$$

$$\begin{tikzcd}
f(a,b,c) \in so(3) \arrow[r, "\mathrm{Ad}_g"] & so(3) \ni g\, f(a,b,c)\, g^{-1} = f(A(a,b,c)) \\
(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \arrow[u, "f"] \arrow[r, "L_A"] & \mathbb{R}^3 \ni A(a,b,c) \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

Sopivalla kannan valinnalla saadaan siis $A = g$!

Yllä kuvailtu tilanne on ekvivalentti seuraavan havainnon kanssa:

8.3.1. <u>Lause</u> Valitussa kannassa $\mathcal{B}$ $Ad: SO(3) \to GL_3(\mathbb{R})$ on inkluusio, joka vie jokaisen matriisin $g \in SO(3)$ itselleen.

<u>Tod</u>: Os. ensin $d(Ad)_I : so(3) \to gl_3(\mathbb{R})$ on $= id_{so(3)}$:

Olk. γ polku $SO(3)$:lla s.e. $\gamma(0) = I$ ja $\gamma'(0) = E_1$

Olk. $v \in so(3)$. Tällöin $t \mapsto Ad_{\gamma(t)}(v) = \gamma(t) v \gamma(t)^{-1}$

on $so(3)$:n polku, jolle pätee:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\gamma(t)}(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma(t) v \gamma(t)^{-1} = \gamma'(0) v \gamma(0)^{-1} + \gamma(0) v \underbrace{\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma(t)^{-1}}_{= -\gamma'(0)}$$

$$= E_1 v - v E_1 = [E_1, v] = \begin{cases} 0, & \text{kun } v = E_1 \\ E_3, & \text{kun } v = E_2 \\ -E_2, & \text{kun } v = E_3 \end{cases}$$

$$= f(E_1 \cdot f^{-1}(v)), \text{ sillä}$$

$f^{-1}(E_1) = (1,0,0)$, $E_1 \cdot f^{-1}(E_1) = 0$, $f(E_1 \cdot f^{-1}(E_1)) = 0$
$f^{-1}(E_2) = (0,1,0)$, $E_1 \cdot f^{-1}(E_2) = (0,0,1)$, $f(E_1 \cdot f^{-1}(E_2)) = E_3$
$f^{-1}(E_3) = (0,0,1)$, $E_1 \cdot f^{-1}(E_3) = (0,-1,0)$, $f(E_1 \cdot f^{-1}(E_3)) = -E_2$.

Eli: lin. kuvaus $v \mapsto \frac{d}{dt}\big|_{t=0} Ad_{\gamma(t)}(v)$ kannassa $\mathcal{B}$ vasemmalta kertomista matriisilla E_1

$$\Rightarrow d(Ad)_I(E_1) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (Ad \circ \gamma(t)) = E_1.$$

Samoin $d(Ad)_I(E_2) = E_2$ ja $d(Ad)_I(E_3) = E_3$.

Saatiin: $d(Ad)_I$ kuvaa $so(3)$:n matriisit itselleen.

$\Rightarrow$ $Ad: SO(3) \to GL_3(\mathbb{R})$ kuvaa $SO(3)$:n 1-parametriperheet

itselleen: $Ad_{e^{Z}} = e^{d(Ad)_I(Z)} = e^{Z}$.

(koska nähdään, että $\exp: so(3) \to SO(3)$ on surjektio)

Saadaan: joukko $\{g \in SO(3) \mid Ad_g = I\}$ on avoin ja

suljettu, joten se on koko $SO(3)$ (yhtenäinen)

Tod. $S = \{g \in SO(3) \mid g f(a,b,c) g^{-1} = f(g \cdot (a,b,c)) \ \forall a,b,c \in \mathbb{R}^3\}$

S suljettu: jos $g_i \in S$ ja $g_i \to g$, niin jatkuvuus $\Rightarrow g \in S$.
S avoin: jos $g \in S$ ja olisi jono $g_i \to g$ s.e.
$g_i \in SO(3) \setminus S \Rightarrow g^* g_i \to I$, joten riittävän

suurilla $i \geq i_0$ löytyy $Z_i \in so(3)$ s.e.

$g^* g_i = e^{Z_i} \overset{\text{yllä}}{\Rightarrow} g^* g_i \in S$

Ad homomorfismi $\Rightarrow g_i = g(g^* g_i) \in S \quad \forall i \geq i_0$ $\lightning$.

8.4. <u>Kompaktin matriisiryhmän adjungoitu operaatio</u>

Nähtiin $Ad(G) \subset GL_d(\mathbb{R})$ osoittaa nain Lien algebra-isomorfismeja. Tämän rajoitus kun G on $O(n)$:in, $U(n)$:in tai $Sp(n)$:in aliryhmä:

8.4.1. <u>Lause</u> Jos G on $O_n(\mathbb{K})$:n aliryhmä, niin $\forall g \in G$ ja $\forall X \in \mathfrak{g}$ pätee $|Ad_g(X)| = |X|$.

Muistutus: $|\cdot|$ $M_n(\mathbb{K})$:n euklidinen normi (kun tulkitaan $M_n(\mathbb{K}) = \mathbb{R}^{n^2}, \mathbb{R}^{2n^2}$ tai $\mathbb{R}^{4n^2}$) rajoitettuna $\mathfrak{g}$:in. Esim. $\mathfrak{u}(2)$:lla $\left|\begin{pmatrix} ai & b+ci \\ -b+ci & di \end{pmatrix}\right| = (a^2+2b^2+2c^2+d^2)^{\frac12}$

<u>Tod</u>: kun $X, Y \in M_n(\mathbb{K}) \triangleq \mathbb{K}^{n^2}$ pätee

$$\langle X, Y \rangle_{\mathbb{K}} = \mathrm{trace}\,(X \cdot Y^*) \quad ; \qquad (8.4.2)$$

$$\mathrm{trace}\,(X \cdot Y^*) = \sum_{i=1}^{n} (X \cdot Y^*)_{ii} = \sum_{i,j=1}^{n} (X_{ij} \cdot Y^*_{ji})$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} X_{ij}\,\overline{Y_{ij}} = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{K}}.$$

Käytetään tätä näyttämään: $\forall g \in O_n(\mathbb{K})$, $\forall X \in M_n(\mathbb{K})$ pätee: $|Xg| = |gX| = |X|$

$g \in O_n(\mathbb{K}) \Rightarrow gg^* = I_n$

$$|X \cdot g|^2 \overset{(8.4.2)}{=} \mathrm{trace}\,(X \cdot g \cdot (Xg)^*) = \mathrm{trace}\,(X \overbrace{gg^*}^{=I_n} X^*)$$

$$= \mathrm{trace}\,(X \cdot X^*) = |X|^2.$$

Samoin: $|g \cdot X|^2 = |(gX)^*|^2 = \mathrm{trace}\,((gX)^* gX)$

$$= \mathrm{trace}\,(X^* \underbrace{g^* g}_{=I_n} X) = \mathrm{trace}\,(X^* X) = |X^*|^2 = |X|^2.$$

$\Rightarrow |g\bar{X}g^{-1}| = |g\bar{X}| = |\bar{X}|$. □

<u>Huom.</u> $\mathfrak{g}$ on vain $M_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n^2}$ $\mathbb{R}$-v.a.a. (ei välttämättä $\mathbb{K}$ v.a.a.)

Tarkastellaan vain sisätulon $\langle \cdot , \cdot \rangle_{\mathbb{K}}$ reaaliosaa $\mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{K})$:lla.

Tämä vastaa $M_n(\mathbb{K})$:n tulkintaa avaruutena $\mathbb{R}^{n^2}$, $\mathbb{R}^{2n^2}$

tai $\mathbb{R}^{4n^2}$ ja rajoittamalla $\mathbb{R}$-sisätuloon $\langle \cdot , \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{g}$:llä

Esim $\langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle f\bar{X}, f\bar{Y} \rangle_{\mathbb{R}} + i \langle f\bar{X}, f(i\bar{Y}) \rangle_{\mathbb{R}}$

$\mathfrak{u}(2)$:lla : $\left\langle \begin{pmatrix} a_1 i & b_1 + c_1 i \\ -b_1 + c_1 i & d_1 i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 i & b_2 + c_2 i \\ -b_2 + c_2 i & d_2 i \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

$= a_1 a_2 + 2b_1 b_2 + 2c_1 c_2 + d_1 d_2 = \operatorname{Re} \langle \; , \; \rangle_{\mathbb{C}} \underset{\uparrow}{=} \langle \; , \; \rangle_{\mathbb{C}}$ tässä erikoistap.

<u>Tulkinta</u>: $f\begin{pmatrix} ai & b+ci \\ -b+ci & di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -b & c & 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^8$.

Ol. G $O_n(\mathbb{K})$:n aliryhmä $(8.4.2) \Rightarrow$

$$\langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re}(\operatorname{trace}(\bar{X} \cdot \bar{Y}^t)) \quad \forall \; \bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{g} \quad (8.4.3)$$

Saadaan.

8.4.3. <u>Seuraus</u>: Ol. $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots B_a\}$ $\mathfrak{g}$:n ortonormaali kanta sisätulon $\langle \cdot , \cdot \rangle_{\mathbb{K}}$ suhteen. Jos

$Ad_g \in$ [illegible] $\forall g \in G$, niin $Ad : G \to$ [illegible] on

[illegible] ortogonaalimatriiseille.

(8.15.)

Tod: Ol. $g \in G$. $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ normin säilyttävä

$\Rightarrow$ Ad_g sisätulon säilyttävä: $\langle Ad_g(X), Ad_g(Y)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle X, Y\rangle_{\mathbb{R}}$.

$\forall X, Y \in \mathfrak{g} \Rightarrow$ Erit. $\langle Ad_g(B_i), Ad_g(B_j)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle B_i, B_j\rangle_{\mathbb{R}} = \delta_{ij}$

$$Ad_g = \begin{pmatrix} Ad_g B_1 \\ \vdots \\ Ad_g B_d \end{pmatrix}$$ rivit ortonormaalit $\Rightarrow Ad_g \in O(d)$. $\square$.

Huom. L. 8.4.3 väite ei päde jos Ad_g ei esitetty $\mathfrak{g}$:n ortonormaalissa kannassa

8.4.4. Lause Ol G $O_n(\mathbb{K})$:n aliryhmä. Tällöin

$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ pätee: $\langle [X, Y], Z\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle [X, Z], Y\rangle_{\mathbb{R}}$.

Tod: Ol α polku G:llä s.e. $\alpha(0) = I$ ja $\alpha'(0) = X$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$ Ad-invariantti $\Rightarrow$

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle Ad_{\alpha(t)} Y, Ad_{\alpha(t)} Z\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$= \left\langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\alpha(t)} Y, Z\right\rangle_{\mathbb{R}} + \left\langle Y, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\alpha(t)} Z\right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$= \langle [X, Y], Z\rangle_{\mathbb{R}} + \langle Y, [X, Z]\rangle_{\mathbb{R}} \ . \square.$$

Katsotaan nyt tarkemmin ehtoa: $\forall g \in O_n(\mathbb{K})$ $\forall X \in M_n(\mathbb{K})$:

$|Xg| = |gX| = |X|$.

Ais: $L_g, R_g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ isometrioita, kun $g \in O_n(\mathbb{K})$.

Tässä saadaan: $\mathcal{L}_g, \mathcal{R}_g : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ isometrioita!

Tämä on keskeinen havainto Riemannin geometriassa:

(8.16.)

Aina kun $G \subset O_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$ on aliryhmä ja $g \in G$,

niin funktiot $L_g : x \mapsto gx$, $R_g : x \mapsto xg$, $M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$

ovat isometrioita, jotka rajoittuvat funktioiksi $G \to G$.

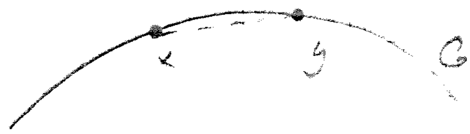
Tätä rajoittumatarkastelua sanotaan $\underline{\underline{G}}$:n isometrioiksi,

koska G:n pisteparin etäisyys on sama kuin niiden

kuvapisteiden etäisyys. Tämä ominaisuus säilyy voimassa

vaikka "etäisyys" G:n pisteiden x, y

välillä korvataan lyhimmän pisteet x, y



G:ssä yhdistävän polun pituutena! On mielenkiintoista, että

$O_n(\mathbb{K})$:n aliryhmillä on niin paljon isometrioita. Tämä

tarkoittaa, että ne ovat erittäin symmetrisiä monistoja

(enemmän kuin monet tyypilliset epäkompaktit matriisi-

ryhmät).

8.5. Globaaleja tuloksia

Lien hakasulku antaa informaatiota ryhmäoperaatiosta lähellä I-alkiota. Kuinka kaukana I:stä?

Ol. G matriisiryhmä ja $\mathfrak{g}$ sen Lien algebra.

Vektorialiavaruus $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ on <u>(Lien)alialgebra</u> jos se on suljettu Lien hakasulun suhteen: $[A,B] \in \mathfrak{h}$ $\forall A,B \in \mathfrak{h}$. V.a.a. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ on <u>(Lien)ideaali</u>, jos $[A,B] \in \mathfrak{h}$ $\forall$ $A \in \mathfrak{h}$, $B \in \mathfrak{g}$.

<u>Huom</u> $\forall$ G:n aliryhmän Lien algebra on $\mathfrak{g}$:n alialgebra.

8.5.1. <u>Lause</u> Ol. G polkuyhtenäinen matriisiryhmä ja $H \subset G$ polkuyhtenäinen aliryhmä. Ol. niiden Lien algebrat $\mathfrak{h}$ ja $\mathfrak{g}$. Tällöin H on G:n normaali aliryhmä $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{h}$ on $\mathfrak{g}$:n ideaali.

<u>Tod:</u> $H \subset G$ <u>normaali</u>: $gH := \{gh \mid h \in H\} = \{hg \mid h \in H\} =: Hg$
ts. $\forall$ $h_1 \in H$ $\exists$ $h_2 \in H$ s.e. $gh_1 = h_2 g$.

"$\Rightarrow$"

Ol. H G:n normaali aliryhmä. Ol. $A \in \mathfrak{h}$ ja $B \in \mathfrak{g}$.

Ol. a polku H:ssa ja b polku G:ssä s.e.

$a(0) = I = b(0)$ ja $a'(0) = A$ ja $b'(0) = B$.

8.18.

$$[A,B] = -[B,A] = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{b(t)} A = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} b(t)a(s)b(t)^{-1}$$

H normaali G:ssä $\Rightarrow b(t)a(s)b(t)^{-1} \in H$

$\Rightarrow [A,B] \in h$.

"$\Leftarrow$" Ol. h g:n ideaali. $\forall B \in g$ ja $A \in h$ pätee

$Ad_{e^B} A \in h$, sillä $\quad (ad_B(A) = [B,A])$

$$Ad_{e^B} A \overset{8.2.3}{=} e^{ad_B}(A) = (I + ad_B + \tfrac{1}{2}(ad_B)^2 + \dots)(A)$$

$$= A + [B,A] + \frac{1}{2}[B,[B,A]] + \frac{1}{6}[B,[B,[B,A]]] + \dots \in h.$$

Olk. $a \in H$ ja $b \in G$. Ol. a, b pienessä I:n ympäristössä s.e. $a = e^A$ jollakin $A \in h$ ja $b = e^B$ jollakin $B \in g$. Tällöin pätee

$$bab^{-1} = be^A b^{-1} = e^{bAb^{-1}} = e^{Ad_b(A)} \in H.$$

Yl. tapaus $a \in H$, $b \in G$ mv. HT. □.

<u>Huom</u>. yllä globaali johtopäätös: H normaali G:ssä Lien algebran lokaalista ominaisuudesta.

Lien hakasulo g:llä määrää oleellisesti ryhmäoperaation G:llä. Tämä näkyy eksplisiittisesti <u>Campbell-Baker-Hausdorffin</u> kaavasta: Kun $X, Y, Z \in g$ ja $|X|, |Y|, |Z|$ riit. pienet yhtälöllä $e^X e^Y = e^Z$ on potenssisarjaratkaisu

8.19.

$$Z = \log(e^X e^Y) = \dots$$
$$= X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] + \frac{1}{12}[Y,[Y,X]] + \dots$$

Campbell-Baker-Hausdorff ⇒ Lien algebrojen ja matriisiryhmien vastaavuus:

8.5.2. <u>Lause</u> (Lien vastaavuuslause) $gl_n(\mathbb{R})$:n alialgebrojen ja polkuyhtenäisten $GL_n(\mathbb{R})$:n aliryhmien välillä on luonnollinen 1-1 vastaavuus. Tämän vastaavuuden kautta polkuyhtenäinen aliryhmä $H \subset GL_n(\mathbb{R})$ kuvautuu Lien algebralleen $\mathfrak{g}(H) \subset gl_n(\mathbb{R})$. Toiseen suuntaan: alialgebra $\mathfrak{h} \subset gl_n(\mathbb{R})$ kuvautuu ryhmäksi $\Gamma(\mathfrak{h})$, jonka generoi joukko $\{\exp(A) / A \in \mathfrak{h}\}$.
Bijektiivisyys? ∀ polkuyhten aliryhmälle $H \subset GL_n(\mathbb{R})$ pätee $\Gamma(\mathfrak{g}(H)) = H$. Tämä seuraa lauseesta 7.1.1. ja L.8.5.1 todistuksessa käytetystä HT:stä.
Alialgebralle $\mathfrak{h} \subset gl_n(\mathbb{R})$ $\mathfrak{g}(\Gamma(\mathfrak{h})) = \mathfrak{h}$ vaikeampi (ks. esim. Rossmann)

<u>Huomaus</u>: Matriisiryhmän G Lien algebra sisältää informaatiota vain identiteettialkion sisältävästä komponentista G_0

<u>Esim</u>. $G = SL_n(\mathbb{Z})$ $G_0 = I$, $\mathfrak{g} = \{0\}$.