

2. Kaikki matriisiryhmät ovat reaalilinjia

2.1. Lause (1) $GL_n(\mathbb{C})$ on isomorfinen $GL_{2n}(\mathbb{R})$ 'n aliryhmän kanssa

(2) $GL_n(\mathbb{H})$ on isomorfinen $GL_{2n}(\mathbb{C})$ 'n aliryhmän kanssa.

Tod: konstruoimalla injektiiviset homomorfismit

$$\rho_n: GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_{2n}(\mathbb{R}) \quad \text{ja}$$

$$\psi_n: GL_n(\mathbb{H}) \rightarrow GL_{2n}(\mathbb{C})$$

Huom. Monet tärkeitset ryhmät kuitenkin luonnollisempina objekteina $GL_n(\mathbb{H})$ 'n tai $GL_n(\mathbb{C})$ 'n aliryhminä kuin $GL_m(\mathbb{R})$ 'n aliryhminä. \Rightarrow Tapauksia $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ tarkkaan!

Esim. Matriisi $B = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ vastaa

lin. kuvausta $R_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, joka on tason kierto posit. kiertosuuntaan kulman θ verran:

Napakoordinaateissa $(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} R_\theta(x, y) &= (r \cos \phi, r \sin \phi) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= (r \cos \phi \cos \theta - r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi \sin \theta + r \sin \phi \cos \theta) \\ &= (r \cos(\phi + \theta), r \sin(\phi + \theta)). \end{aligned}$$

Vastaavasti Matriisi $A = (e^{i\theta}) \in M_1(\mathbb{C})$ on tason

kierto kuten yllä: $R_A: \mathbb{C}^1 \rightarrow \mathbb{C}^1, z = re^{i\theta}$

$R_A(z) = z \cdot A = re^{i(\theta+\theta)}$, joten A ja B ovat samaa tason liikeitä.

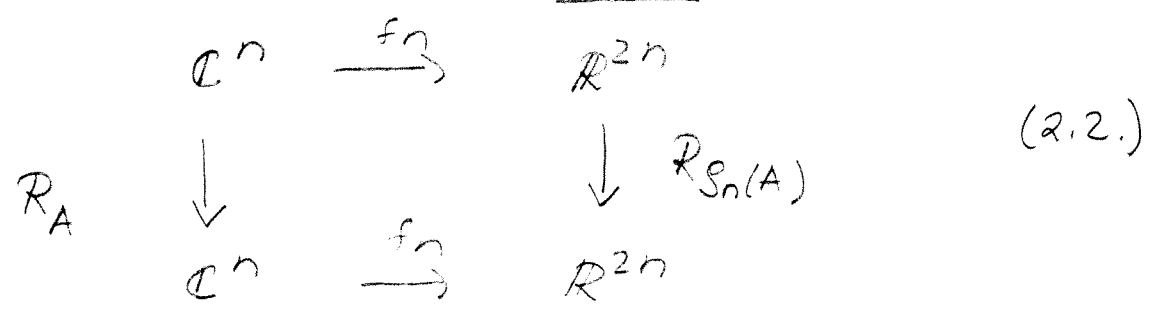
Tehtävä: konstruois funktio $S_n: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_{2n}(\mathbb{R})$ se.

$\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ vastaa 'samaan aronuden \mathbb{C}^n liikeitä' kuin kuin $B = S_n(A) \in M_{2n}(\mathbb{R})$ avaruudessa \mathbb{R}^{2n} .

Hiinonon samastus $f_n: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ asettamalla

$$f_n(a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n) := (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$$

Määriteltävä S_n se. kaario



kommutois eli pätee: $R_{S_n(A)} \circ f_n = f_n \circ R_A$.

kun $n=1$ saadaan edellisen lianteissa

$$\begin{aligned}
 A &= (e^{i\theta}) = \cos\theta + i\sin\theta \\
 &= a + ib \in M_1(\mathbb{C})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\
 &\in M_2(\mathbb{R})
 \end{aligned}$$

joiten kunnatun artoa

$$S_1(a+ib) := \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Tällöin kaano

(2.3.)

$$x+iy = z \in \mathbb{C} \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^2 \ni (x,y)$$

$$z \ni A = (a+ib) \quad R_A \downarrow$$

$$\downarrow R_{S_1(A)} \quad S_1(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$R_A z = (ax-by+i(bx+ay)) \in \mathbb{C} \xrightarrow{f_1}$$

$$\mathbb{R}^2 \ni R_{S_1(A)}(x,y) = (xa-by, xb+ay)$$

kommutoi,

Yleisesti: $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ kun

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} + ib_{11} & \dots & a_{1n} + ib_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + ib_{n1} & \dots & a_{nn} + ib_{nn} \end{pmatrix}$$

asetetaan $S_n: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_{2n}(\mathbb{R})$

$$S_n(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} & \dots & a_{1n} & b_{1n} \\ -b_{11} & a_{11} & \dots & -b_{1n} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_{n1} & \dots & a_{nn} & b_{nn} \\ -b_{n1} & a_{n1} & \dots & -b_{nn} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

HT: osoita, että kaano (2.2) kommutoi.

Huom: Kuvauksen S_n määrittäjä riippuu samastuksesta $f_n: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$.

HT: Määritä S_n kun aset. $f_n(x_1+iy_1, \dots, x_n+iy_n) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$.

2.3. Lause : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ja $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ pätee :

2.4.

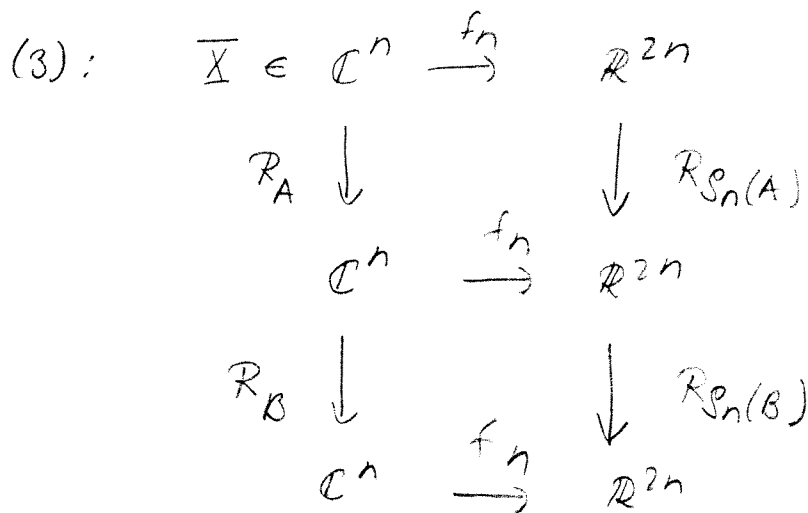
(1) $S_n(\lambda A) = \lambda S_n(A)$

(2) $S_n(A+B) = S_n(A) + S_n(B)$

(3) $S_n(A \cdot B) = S_n(A) \cdot S_n(B)$

ts. (1), (2) S_n \mathbb{R} -lineaarinen
 (3) S_n ryhmähomomorfismi

Tod. : (1), (2) selvät



Pätee : $\mathcal{R}_{S_n(B)} \circ \mathcal{R}_{S_n(A)} (f_n \bar{X}) = \mathcal{R}_{S_n(B)} (f_n \bar{X} \cdot S_n(A))$
 $= f_n \bar{X} \cdot S_n(A) \cdot S_n(B) = \mathcal{R}_{S_n(A)S_n(B)} (f_n \bar{X})$

Toisaalta : $\mathcal{R}_B \circ \mathcal{R}_A (\bar{X}) = \mathcal{R}_B (\bar{X}A) = \bar{X}AB = \mathcal{R}_{AB} (\bar{X})$.

Koska kaanon kommutoi, niin pätee

$f_n \circ \mathcal{R}_{AB} = \mathcal{R}_{S_n(A)S_n(B)} \circ f_n$, joten
 $f_n \circ \mathcal{R}_{AB} \Rightarrow$
 $S_n(AB) = S_n(A)S_n(B)$. \square

Huom : $S_n : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_{2n}(\mathbb{R})$ on injektio :

$$S_n(A) = S_n(B) \Rightarrow f_n(R_A(\mathbb{I})) \stackrel{\text{komm. kaan'o}}{=} R_{S_n(A)}(f_n \mathbb{I})$$

$$\downarrow$$

$$= R_{S_n(B)}(f_n \mathbb{I}) = f_n(R_B(\mathbb{I})) \quad \forall \mathbb{I} \in \mathbb{C}^n$$

$$f_n \text{ bijektio} \Rightarrow R_A(\mathbb{I}) = R_B(\mathbb{I}) \quad \forall \mathbb{I} \in \mathbb{C}^n \Rightarrow A = B.$$

Selvästi S_n ei ole surjektio.

Määritelmä Matrisi $A \in S_n(M_n(\mathbb{C})) \subset M_{2n}(\mathbb{R})$ on kompleksi lineaarinen matrisi.

2.4. lause $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$ on kompleksi lineaarinen jos ja vain jos kuvaus $f_n^{-1} \circ R_B \circ f_n : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ on \mathbb{C} -lineaarinen kuvaus \mathbb{C} .

Huom kuvaus $F := f_n^{-1} \circ R_B \circ f_n$ on $\mathbb{C}^n \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}^{2n}$
 \mathbb{R} -lineaarinen kun \mathbb{C}^n tarkoitetaan \mathbb{R} -vektori-
 tilaksi vaikeksi,

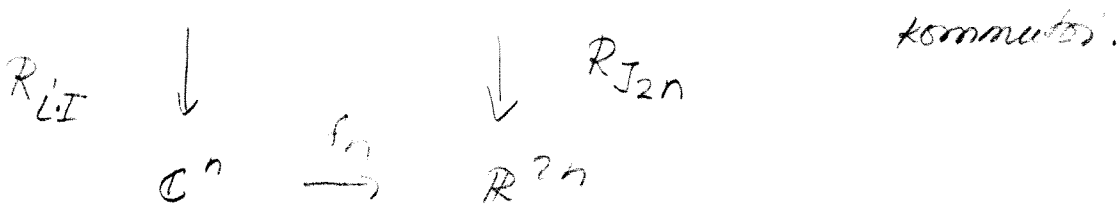
F \mathbb{C} -lineaarinen $\Leftrightarrow F(i\mathbb{I}) = iF(\mathbb{I}) \quad \forall \mathbb{I} \in \mathbb{C}^n$

Asett. $J_{2n} := S_n(i \cdot I_n) = S_n \begin{pmatrix} i & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & i & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\in M_{2n}(\mathbb{C})$

Nyt pätee $J_{2n}^2 = -I_{2n}$ ja kaan'o $\in M_{2n}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}^{2n}$$



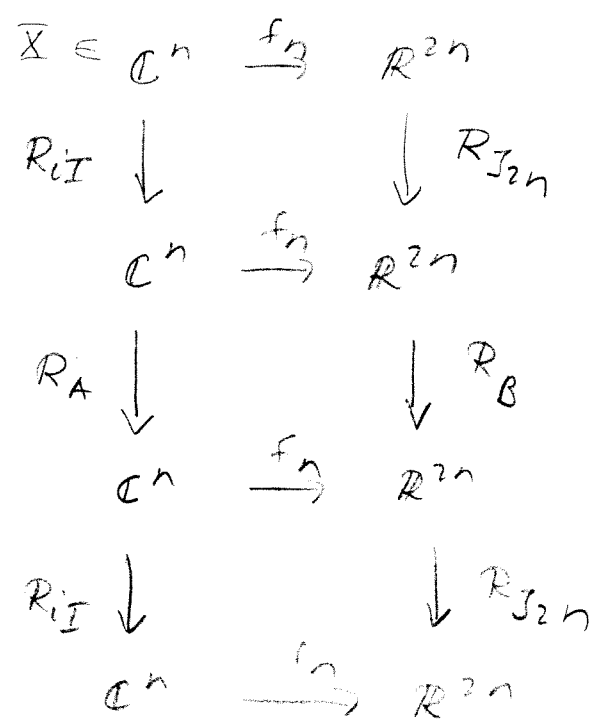
Matrisi J_{2n} on \mathbb{R}^{2n} :n standardi kompleksistruktuurin.

$R_{J_{2n}}$ mielis \mathbb{C}^n :n illä kääntäminen \mathbb{R}^{2n} :ssä,

2.5. Lause $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$ on kompleksilineaarinen

$$\Leftrightarrow B \cdot J_{2n} = J_{2n} \cdot B$$

Tod " \Rightarrow " $\exists A \in M_n(\mathbb{C})$ s.e. $B = \rho_n(A)$ ja kaunis



kommutoi.

Pöke: $(R_{iI} R_A R_{iI})(\underline{x}) = (R_{iI} R_A)(i\underline{x}) = R_{iI}(i\underline{x}A) = -\underline{x}A$
 $= R_{-A} \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$

Kaunisla saadaan:

$$R_{J_{2n}} \circ R_B \circ R_{J_{2n}} = R_{\rho_n(-A)} = R_{-\rho_n(A)} = R_{-B}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow R_{-B}(f_n(\underline{x})) &= R_{J_{2n}}(R_B(f_n(\underline{x})J_{2n})) \\
 &= R_{J_{2n}}(f_n(\underline{x})J_{2n}B) = f_n(\underline{x})J_{2n}BJ_{2n} = R_{J_{2n}BJ_{2n}}(f_n(\underline{x})) \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n \\
 \Rightarrow -B &= J_{2n}BJ_{2n} \Rightarrow BJ_{2n} = J_{2n}B.
 \end{aligned}$$

" \Leftarrow " HT \square .