## 9.7. Kommutoivat kaarit

Ol. $G \in \{SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)\}$

Annetulla $x \in G$ kuvaile ne $G$:n alkiot, jotka kommutoivat $x$:n kanssa.

Ol. ensin $x \in T$, $T$ $G$:n standardi maksimaalinen torus.

<u>Määritelmä</u> Alkio $x \in T$ on <u>säännöllinen</u> jos sen määräävät kulmat $\theta_1, \dots, \theta_n \in [0, 2\pi)$ ovat erisuuria ja lisäksi ryhmän $G = SO(n)$ tapauksessa $\theta_i \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ $\forall i = 1, \dots, n$.

Tapauksessa $G = SU(n)$ $x = diag(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_{n-1}}, e^{-i(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1})})$ ja myös viimeisen kulman on oltava erisuuri.

Id-alkio $I \in T$ on niin epäsäännöllinen kuin mahdollista. Samoin alkio $-I$ jos $\in G$ ($SO(2n)$, ei $SO(2n+1)$) niin $-I \in T$ mahdollisimman epäsäännöllinen.

<u>Huom</u> $I$ ja $-I$ kommutoivat kaikkien $G$:n alkioiden kanssa ja sisältyvät jokaiseen maksimaaliseen torukseen.

9.7.1. <u>Lause</u> Ol. $x \in T$ säännöllinen. Tällöin $x$ kommutoi vain $T$:n muiden alkioiden kanssa l. $T$ on ainoa maksimaalinen torus, joka sisältää $x$:n.

Tod: Ak. L. 9.2.1 todistuksessa osoitettiin maksimaalisuus näyttämällä, että jos $g \in G$ kommutoi kaikkien T:n alkioiden kanssa, niin $g \in T$. Voidaan todistaa vahvempi väite:
Jos $g \in G$ kommutoi jonkin T:n säännöllisen alkion kanssa, niin $g \in T$. (HT). □.

Yleinen tapaus palautuu tilanteeseen $x \in T$.

Määritelmä Alkio $y \in G$ on säännöllinen jos $y = gxg^{-1}$ jollakin $g \in G$ ja $x \in T$ on säännöllinen.

Esim $y \in U(n)$ säännöllinen $\Leftrightarrow$ y:n ominaisarvoihin liittyvät ominaisavaruudet 1-ulotteisia (kompleksinen dim.)

9.7.2. Seuraus G:n säännöllinen alkio kuuluu vain yhteen maksimaaliseen torukseen ja kommutoi vain sihen kuuluvien alkioiden kanssa.

Tod! Ol. $y \in G$ säännöllinen l. $y = gxg^{-1}$ jollakin $g \in G$ ja säännöllisellä $x \in T$. Os. y kommutoi vain maksimaalisen toruksen $gTg^{-1}$ alkioiden kanssa:

Ol $w \in G$: $yw = wy \Leftrightarrow (gxg^{-1})w = w(gxg^{-1})$

$$\Leftrightarrow x(g^{-1}wg) = (g^{-1}wg)x \overset{L.9.7.1}{\Leftrightarrow} g^{-1}wg = z \in T$$

$$\Leftrightarrow w = gzg^{-1} \in gTg^{-1}. \;\square.$$

# 9.8. Kompaktien matriisiryhmien luokittelu

Tehtävä: määrää kaikki kompaktit matriisiryhmät

Tähän mennessä: $SO(n)$, $O(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$

ja niiden suorat tulot. Onko muita?

Voidaan todistaa:

9.8.1. Lause Kompaktin matriisiryhmän Lien algebra on isomorfinen tuloryhmän $G_1 \times \ldots \times G_k$ Lien algebran kanssa kun $G_i$ on jokin ryhmistä $SO(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ jollakin $i$ tai jokin seuraavista ns. poikkeuksellisista matriisiryhmistä

(1) $G_2$ 14-ulotteinen

(2) $F_4$ 52- "

(3) $E_6$ 78 - " -

(4) $E_7$ 133 - " -

(5) $E_8$ 248 - " - .

Huom 1° edellä nähtiin: Lien algebra ei määrää matriisiryhmää! Esim $U(n)$ puuttuu luettelosta, sillä $\mathfrak{u}(n) \cong \mathfrak{su}(n) \times \mathfrak{so}(2)$ (# 9.1.)

2° Myös muotoa $G_1 \times \ldots \times G_k$ olevien matriisiryhmien luokittelu Lien algebraisomorfismia vaille tunnetaan. Kts. esim. Wan: Lie algebras

## 9.9. Lien ryhmät

Määritelmä: Lien ryhmä on monisto $G$, jolla on sileä ryhmäoperaatio $G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \to g_1 \cdot g_2$ ja ja kuvaus $G \to G$ $g \mapsto g^{-1}$ on sileä.

Huom. ehto $g \mapsto g^{-1}$ sileä seuraa ryhmäoperaation sileydestä (HT).

Aik. $\forall$ matriisiryhmä on monisto. Käänteen pätee

9.9.1. Lause $\forall$ kompakti Lien ryhmä on sileästi isomorfinen matriisiryhmän kanssa.

Tod: Rossmann tai Ville Turunen: Mat-1.159.

Kaikki keskeiset matriisiryhmien struktuurit yleistyvät Lien ryhmille. Esim. $- \mathfrak{g} := T_e G$, $e$ $G$:n neutraalialkio

- $\forall g \in G$ $C_g : G \to G$ $x \mapsto g x g^{-1}$ sileä, joten $Ad_g := d(C_g)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$
- $\forall A, B \in \mathfrak{g}$ $[A, B] := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\alpha(t)} B$, missä $t \mapsto \alpha(t)$ differentioituva polku $G$:ssä $\alpha(0) = e$ ja $\alpha'(0) = A$. Voidaan osoittaa samat ominaisuudet kuin matriisiryhmillä.

- $\exp : \mathfrak{g} \to G$?

Jos $A \in \mathfrak{g}$, niin polku $\gamma : t \to e^{tA}$ on sen

G:n vektorikentän integraalikäyrä, jonka arvo

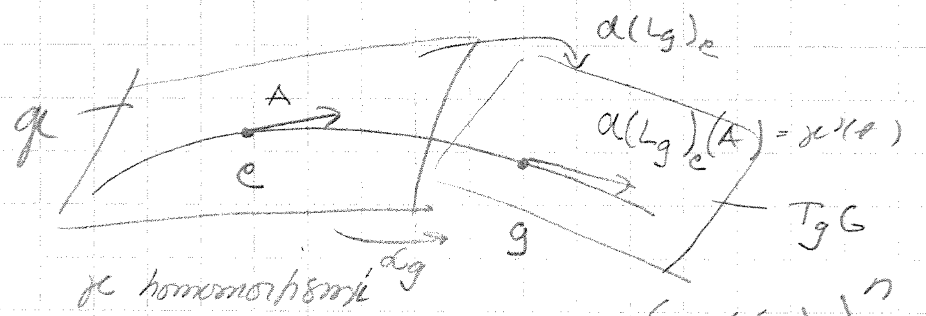
pisteessä $g \in G$ on $d(L_g)_e(A) \in T_g G$,

missä $L_g : G \to G$ on vasen translaatio $x \mapsto gx$.

Siis: pisteessä $\gamma(t) = g$ ja $\gamma'(t) = d(L_g)_e(A)$

l. $\gamma$ on dy:n $\gamma'(t) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L_{\gamma(t)}(\gamma(s)) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \gamma(t)\gamma(s)$

$= \gamma(t)\gamma'(0) = \gamma(t)A$ ratkaisu pienillä $t$.




$\gamma$ homomorfismi $\Rightarrow$ mv. $t$: $\gamma(t) = \left(\gamma\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$.

9.9.2. <u>Lause</u> $\forall$ Lien ryhmän Lien algebra on isomorfinen matriisiryhmän Lien algebran kanssa.

Lisäksi pätee: Jokainen yhdesti yhtenäinen Lien ryhmä on sileästi isomorfinen matriisiryhmän kanssa.

## 10. Lien ryhmä, joka ei matriisiryhmä

ns. Heisenbergin ryhmä $Heis_n$ joka keskeinen kontaktigeometriassa, topologiassa ja kvanttifysiikassa.

Ol $n \geq 3$

$M_n(\mathbb{R}) \supset SUT_n(\mathbb{R})$ unipotentit matriisit

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & & & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & a_{(n-2)(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & & 1 & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$$

muodostavat matriisiryhmän. Sen Lien algebra $sut_n(\mathbb{R})$ koostuu matriiseista

$$\begin{pmatrix} 0 & t_{12} & \cdots & & & t_{1n} \\ 0 & 0 & t_{23} & \cdots & & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & t_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

$$\dim(SUT_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

10.1. Lause $\forall\, n \geq 3$ keskus $Z(SUT_n(\mathbb{R}))$ koostuu matriiseista $(a_{ij}) \in SUT_n(\mathbb{R})$, joilla $a_{ij} = 0$ paitsi kun $i = 1$ ja $j = n$

Tod: $Z(SUT_n(\mathbb{R})) = \{ g \in SUT_n(\mathbb{R}) \mid ga = ag \quad \forall\, a \in SUT_n(\mathbb{R}) \}$

$n=3$:
$$\begin{pmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ 0 & 1 & g_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}+g_{12} & a_{13}+g_{12}a_{23}+g_{13} \\ 0 & 1 & a_{23}+g_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ 0 & 1 & g_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & g_{12}+a_{12} & g_{13}+a_{12}g_{23}+a_{13} \\ 0 & 1 & g_{23}+a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \quad g_{12}a_{23} = a_{12}g_{23} \quad \forall a \quad \Leftrightarrow \quad g_{12} = g_{23} = 0$

$\Rightarrow \quad Z_1(SUT_3(\mathbb{R})) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & g_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, g_{13} \in \mathbb{R} \right\}$. yl. tap HT. $\square$

<u>Huom</u> $(\mathbb{R},+) \cong Z_1(SUT_n(\mathbb{R}))$ isomorfismi

$Z_1(SUT_n(\mathbb{R}))$:n diskreetti aliryhmä $(\mathbb{Z},+) \cong \{(a_{ij}) \in Z_1(SUT_n) \mid a_{1n} \in \mathbb{Z}\}$

$=: Z_n$ on normaali.

$n=3$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ 0 & 1 & g_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & g_{12} & g_{13}+k \\ 0 & 1 & g_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ 0 & 1 & g_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aset. $\mathrm{Heis}_n := SUT_n(\mathbb{R}) / Z_n$.

Varustetaan $\mathrm{Heis}_n$ tekijätopologialla: Olk. $\pi: SUT_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Heis}_n$

projektio. $U \subset_o \mathrm{Heis}_n \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subset_o SUT_n(\mathbb{R})$

$Z_n$ diskreetti $\Rightarrow \pi: SUT_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Heis}_n$ lokaali homeomorfis

$\Rightarrow \mathrm{Heis}_n$ Lien ryhmä (HT)

$\Rightarrow \mathfrak{heis}_n = \mathfrak{sut}_n$.

10.2. <u>Lause</u> $n \geq 3$ $Z_1(Heis_n) = \pi(Z_1(SUT_n(\mathbb{R})))$.

Erityisesti siis $Z_1(Heis_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in [0,1) \right\}$

$\cong \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} = S^1$

$t \mapsto e^{2\pi i t}$

Samoin $n > 3$.

Tark. erityisesti tapausta $n = 3$:

Aset. $p : SUT_3 \to \mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (x, y)$

surjektiivinen homomorfismi

$\ker p = Z_1(SUT_3(\mathbb{R}))$. Koska $Z_3$ on $\ker p$:n normaali aliryhmä, niin löytyy indusoitu surjektiivinen homomorfismi $\bar{p} : Heis_3 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee

$\bar{p} \circ \pi = p$.

$$\begin{tikzcd} SUT_3(\mathbb{R}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^2 \\ Heis_3 \arrow[ur, "\bar{p}"'] & \end{tikzcd}$$

Merk. alkiota $[g] \in Heis_3$, $g = \begin{pmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SUT_3(\mathbb{R})$

$[g] = \{ ag \mid a \in Z_3 \} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 & x & t + a_{1n} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \,\middle|\, a_{1n} \in \mathbb{Z} \right\}$

$=: [x, y, e^{2\pi i t}]$,

jolloin yl. $[x, y, z] \in Heis_3$, $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in S^1$

1-alkio $= 1 = [0, 0, 1]$. Vastaavasti alkiota

$\begin{pmatrix} 0 & x & t \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{heis}_3$ merk $(x, y, t)$

10.4 1/2

(*) $Heis_3$:n <u>kommutaattori</u> on muotoa

$$[x_1,y_1,z_1][x_2,y_2,z_2][x_1,y_1,z_1]^{-1}[x_2,y_2,z_2]^{-1}$$

$$= [x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1 z_2 e^{x_1 y_2 2\pi i}]\underbrace{[-x_1,-y_1,\ z_1^{-1}e^{2\pi i x_1 y_1}][-x_2,-y_2,z_2^{-1}e^{2\pi i x_2 y_2}]}_{=[-x_1-x_2,\,-y_1-y_2,\ z_1^{-1}z_2^{-1}e^{2\pi i(x_1y_1+x_2y_2+x_1y_2)}]}$$

$$= [0,0,\ e^{2\pi i(x_1y_1+x_2y_2+2x_1y_2-(x_1+x_2)(y_1+y_2))}]$$

$$= [0,0,\ e^{2\pi i(x_1y_2-x_2y_1)}] \in Z(Heis_3).$$

Erityisesti siis jokainen $a \in Z(Heis_3)$ on

kommutaattori $a = [q_1][q_2][q_1]^{-1}[q_2]^{-1}$

joillakin $[q_1],[q_2] \in Heis_3$.

(10.4.)

10.3. Lause Heis$_3(\mathbb{R})$:n kertolasku ja käänteisalkio määräytyvät ehdoista: $[x,y,z]^{-1} = [-x,-y, z^{-1}e^{2\pi i xy}]$

$$[x_1,y_1,z_1][x_2,y_2,z_2] = [x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1 z_2 e^{x_1 y_2 2\pi i}]$$

ja heis$_3$:n Lien hakasulku:

$$[(x_1,y_1,t_1),(x_2,y_2,t_2)] = (0,0,x_1y_2 - y_1x_2)$$

(*)

Tod: Olk. $z_1 = e^{2\pi i t_1}$ ja $z_2 = e^{2\pi i t_2}$

$$\Rightarrow [x_1,y_1,z_1][x_2,y_2,z_2] = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & t_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_2 & t_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x_1+x_2 & t_2+t_1+x_1y_2 \\ 0 & 1 & y_1+y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1z_2e^{x_1y_2 2\pi i}]$$

$$e^{2\pi i(t_1+t_2+x_1y_2)} = z_1z_2e^{2\pi i x_1 y_2}.$$

Olk. $z = e^{2\pi i t}$

$$[x,y,z] = \begin{pmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [x,y,z]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & xy-t \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{2\pi i(xy-t)} = z^{-1}e^{2\pi i xy}$$

$$= [-x,-y,z^{-1}e^{2\pi i xy}]$$

Ol. $(x_i,y_i,t_i) \in$ heis$_3$

$$[(x_1,y_1,t_1),(x_2,y_2,t_2)] = (x_1,y_1,t_1)(x_2,y_2,t_2) - (x_2,y_2,t_2)(x_1,y_1,t_1)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & x_1 & t_1 \\ 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x_2 & t_2 \\ 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x_2 & t_2 \\ 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x_1 & t_1 \\ 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1y_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_2y_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (0,0,x_1y_2 - y_1x_2) \quad \square.$$

Heis$_3$:n kanta $E_1 = (1,0,0)$, $E_2 = (0,1,0)$, $E_3 = (0,0,1)$,

jolla pätee: $[E_1, E_2] = E_3$ ja $[E_2, E_3] = 0 = [E_3, E_1]$.

10.4. Lause

Ei löydy jatkuvaa homomorfismia $\varphi: Heis_3 \to GL_n(\mathbb{C})$,

jolla pätisi $\ker \varphi = \{1\}$.

Tod: VO: $\varphi: Heis_3 \to GL_n(\mathbb{C})$ jatkuva homomorfismi,

jolla $\ker \varphi = \{1\}$ ja $n$ pienin mahdollinen.

$\forall g \in Heis_3$ $\quad L_{\varphi(g)}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

Identifioidaan $Z(Heis_3) \cong S^1$ kuten edellä.

$\forall r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\quad e^{2\pi r i}$ on $S^1$:n topologinen generaattori eli $\langle e^{2\pi r i} \rangle$ on tiheä $S^1$:llä.

Olkoon $a = [0, 0, e^{2\pi r i}]$. Olkoon $\lambda \neq 0$ matriisin $\varphi(a)$ ominaisarvo ja $v$ siihen liittyvä ominaisvektori $|v| = 1$. Voidaan olettaa $|\lambda| \geq 1$ (korvaamalla $a$ tarvittaessa pisteellä $a^{-1}$, sillä $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$). Jos $|\lambda| > 1$, niin pätee

$\varphi(a^k) v = \varphi(a)^k v = \lambda^k v \implies$

$|\varphi(a^k) v| = |\lambda|^k \to \infty$ kun $k \to \infty$

$\implies \varphi(Z(Heis_3))$ rajoittamaton ↯ sillä

$Z(Heis_3) \cong S^1$ kompakti ja $\varphi$ jatkuva.

(10.6.)

Täytyy siis päteä $|\lambda| = 1$.

$\varphi$ homomorfismi ja $a \in Z(Heis_3)$, joten $\forall g \in Heis_3$

pätee: $\varphi(a)\varphi(g)v = \varphi(ag)v = \varphi(ga)v = \varphi(g)\varphi(a)v$

$$= \lambda \varphi(g)v,$$

joten myös $\varphi(g)v$ on $\varphi(a)$:n ominaisarvoon

$\lambda$ liittyvä ominaisvektori. Vastaavasti

Aset. $V_\lambda := \{v \in \mathbb{C}^n \mid \exists k \geq 1 \text{ s.e. } (\varphi(a) - \lambda I_n)^k v = 0\}$

$V_\lambda \subset \mathbb{C}^n$ $\mathbb{C}^n$:n v.a.a., joka suljettu operaatioiden

$\varphi(g)$ suhteen $\forall g \in Heis_3$. Valitaan $k_0 \geq 1$

suurin luku s.e. $\exists v_0 \in V_\lambda$, joka toteuttaa

$$(\varphi(a) - \lambda I_n)^{k_0} v_0 = 0, \quad (\varphi(a) - \lambda I_n)^{k_0 - 1} v_0 \neq 0.$$

Jos $k_0 > 1$ niin voidaan asettaa

$$u := (\varphi(a) - \lambda I_n)^{k_0 - 2} v_0 \neq 0 \quad \text{ja}$$

$$v := (\varphi(a) - \lambda I_n)^{k_0 - 1} v_0 = (\varphi(a) - \lambda I_n) u \neq 0$$

jolloin $(\varphi(a) - \lambda I_n) v = 0$ l. $\varphi(a) v = \lambda v$

ja $\varphi(a) u = v + \lambda u$.

Nyt pätee $\varphi(a^k) u = \varphi(a)^k u = \varphi(a)^{k-1}(\lambda u + v)$

$$= \lambda \varphi(a)^{k-1} u + \varphi(a)^{k-1} v = \lambda \varphi(a)^{k-2}(\lambda u + v) + \lambda^{k-1} v$$

$$= \lambda\{\lambda \varphi(a)^{k-3}(\lambda u + v) + \lambda^{k-2} v\} + \lambda^{k-1} v$$

$$\ldots = \lambda^k u + k \lambda^{k-1} v$$

$v \neq 0 \Rightarrow |\varphi(a^k)u| = |\lambda u + kv| \to \infty$ kun $k \to \infty$ (10.7)

$\lightning$ sillä $\varphi(Z_1(\text{Heis}_3))$ rajoitettu $\Rightarrow$

Täytyy päteä $k_0 = 1$ ja $V_\lambda$ on $\lambda$:n ulottuvuus ominaisavaruus.

Valitsemalla $V_\lambda$:lle ominaisvektoreista koostuva kanta, saadaan homomorfismi $\theta : \text{Heis}_3 \to GL_d(\mathbb{C})$, jolla

$\theta(a) = \lambda I_d \Rightarrow \theta(a^k) = \lambda^k I_d \quad \forall k$

jatkuvuus $\Rightarrow \forall g \in Z_1(\text{Heis}_3) \quad \theta(g) = (\text{skalaari}) I_d$

$n$ oli pienin mahdollinen $\Rightarrow d = n$ ja voidaan

olettaa $\varphi(a) = \lambda I_n$. Edellä nähtiin: $\forall z \in Z_1(\text{Heis}_3)$

on kommutaattori $z = ghg^{-1}h^{-1}$ joillakin $g, h \in \text{Heis}_3$

$\Rightarrow \det \varphi(z) = \det(\varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1}\varphi(h)^{-1}) = 1$

$\Rightarrow \exists$ jatkuva $\mu : Z_1(\text{Heis}_3) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ s.e.

$\forall z \in Z_1(\text{Heis}_3) \quad \varphi(z) = \mu(z) I_n$ ja $\mu(z)^n = 1$

$Z_1(\text{Heis}_3) \cong S^1$ polkuyhtenäinen $\Rightarrow \mu(z) = 1 \quad (\mu(1) = 1)$

$\Rightarrow \forall z \in Z_1(\text{Heis}_3)$ $\varphi(z)$:n ainoa ominaisarvo

on 1, ts. koko keskus on $\ker \varphi$:n

aliryhmä $\lightning$ $\square$.

Huom Oleellisesti samalla argumentilla tapaus

$n \geq 3$ : $Heis_n$ ei realisoitanssa matriisiryhmänä.

L. 10.4. todistus antaa myös:

10.5. Lause Olkoon $G$ kompakti Lien ryhmä ja

$\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ jatkuva homomorfismi. Tällöin

$\forall g \in G \quad \rho(g)$ on diagonalisoituva.