1. Matriiseista

1.1. Pallon jäykät liikkeet

"Määritellään"

G = kiinteällä jalustallaan seisovan karttapallon kaikki eri asennot ("SO(3)")

- kiinnitetään jokin asento ≙ "identtinen alkio"
- kaikki muut G:n alkiot saadaan tästä pyörittelemällä palloa jollakin tavoin.

⇝ G ryhmä liikkeiden yhdistämisen suhteen (eri liikesarjat voivat johtaa samaan asentoon, siis operointi hyvin määritelty)

1. Onko G vaihdannainen?

Pohjoisnavan paikan kiinnittämisen jälkeen "ympyrän verran" G:n alkioita ≙ pyöritys napojen suhteen
→

2. Löytyykö bijektiivinen vastaavuus G:n ja $S^2 \times S^1 = \{(p,\theta) \mid p \in S^2, \theta \in S^1\}$:n välille?

Jos vastaus 2:n kyllä saadaan G:n alkiot ilmaistua kolmen reaaliluvun avulla. Jos vastaus ei voidaanko siti yleensä G:n alkioille sc. parametrisointi niitä olennaisesti 3 reaalilukua?

3. Saadaanko jokainen G:n alkio alkeaan identtisestä alkiosta kiertämällä tietyn kulman verran jonkin akselin suhteen?

Jos rasteus myönteinen, niin jokeista 6:n alleida kohti löytyy pari antipodaalisia pisteitä ('identtisessä' asennossa)

HT: etsi rasteus kysymyksiin 1,2,3 jalkapallon avulla.

Kysymyksen täsmällinen muotoilu + rasteus selviää kurssin aikana.

1.2. Kunnat ja vinokunnat

Olk. $M_n(\mathbb{K})$ $\mathbb{K}$-kertoimiset $n \times n$ matriisit.

yleensä $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$. Muita vaihtoehtoja?

Määritelmä Vinokunta on joukko $\mathbb{K}$, joka varustettu yhteenlaskulla $(+)$ ja kertolaskulla $(\cdot)$ s.e. pätee

(1) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{K}$
$(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

(2) $\mathbb{K}$ on abelin ryhmä $+$ laskun suhteen. Identiteetti alkiota merkitään symbolilla 0.

(3) $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ on ryhmä $\cdot$ laskun suhteen. Identiteetti alkiota merkitään symbolilla 1.

Jos vinokunta on abelin ryhmä $\cdot$ laskun suhteen ($a \cdot b = b \cdot a \quad \forall\, a, b \in K$) s.e. on kunta.

Esim $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ kuntia

$\mathbb{C}$ kunta: $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

mikään $\mathbb{R}^n$ $n \geq 2$ ei (vino)kunta jos asetetaan

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$(a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$$

1.3. Kvaterniot

Voidaanko määritellä tulo $\mathbb{R}^n$:ssä s.e. yhdessä vektoriyhteenlaskun kanssa muodostaa vinokunnan?

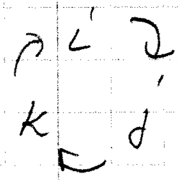
1843 Hamilton: kyllä kun $n = 4$

Merk. $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ symbolisesti $a+bi+cj+dk$ ja määrit. $\cdot$ symboleille $\{1, i, j, k\}$:

$$1\cdot i = i \cdot 1 = i, \quad j\cdot 1 = 1 \cdot j = j, \quad k \cdot 1 = 1 \cdot k = k$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$i \cdot j = k, \quad j \cdot k = i, \quad k \cdot i = j$$



$$j \cdot i = -k, \quad k \cdot j = -i, \quad i \cdot k = -j$$

$$\Rightarrow (a+bi+cj+dk)\cdot(x+yi+zj+wk)$$

$$= (ax-by-cz-dw) + (ay+bx+cw-dz)i$$

$$+ (az-bw+cx+dy)j + (aw+bz-cy+dx)k$$

merk. $\mathbb{H} = (\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ kvaterniot, kun $\cdot$ kuten yllä, muodostavat vinokunnan (HT)

Aset. $q = a+bi+cj+dk$ <u>liittoluku</u>

$$\bar{q} = a-bi-cj-dk \quad \text{ja normi}$$

$$|q| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^{1/2}$$

Pätee: $q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = |q|^2$ ja

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} \quad \forall\, q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}.$$

Huom 1° $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$

2° $\forall z \in \mathbb{C}$ on muotoa $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ analogisesti
$\forall q \in \mathbb{H}$ " $q = z + wj$, $z, w \in \mathbb{C}$ sillä pätee

$$a + bi + cj + dk = (a + bi) + (c + di)j$$

analogia: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ vs. $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$

Löytyykö tuloja, joiden suhteen $\mathbb{R}^n$ vinokunta, kun $n \neq 1, 2, 4$?

Löytyykö muita (olennaisesti eri) tuloja avaruuksissa $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^4$, joiden suhteen vinokuntia?

Voidaanko $\mathbb{R}^4$ varustaa kunnan struktuurilla

Vast: Fröbenius 1877 EI:

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ainoat liitännäiset reaaliset jakoalgebrat luonnollista ekvivalenssia vaille.

Huom $\mathbb{R}^8$:ssa oktoniot $(\cdot)$ ei liitännäinen

Tällä kurssilla

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ tai $\mathbb{H}$

geometrisen struktuurin varustamiseksi

(esim $\mathbb{Q}$ tai äärell. kunnat eivät salllittuja)

Tällöin

$$M_{m,n}(\mathbb{K}) \trianglelefteq \begin{cases} \mathbb{R}^{nm}, & \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^{2nm}, & \mathbb{K} = \mathbb{C} \\ \mathbb{R}^{4nm}, & \mathbb{K} = \mathbb{H} \end{cases}$$

($\mathbb{K}$-kertoimiset $m \times n$ matriisit)

1.4. Matriisioperaatiot ja lineaariset kuvaukset

01. $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, $a \in \mathbb{K}$, $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$

Määrit $a \cdot A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ vasemmalta kertomalla:

$$(a \cdot A)_{ij} := a A_{ij}$$

Tämä operaatio on vasemmanpuoleinen skalaarilla kertominen, joka tekee avaruudesta $M_{n,m}(\mathbb{K})$ vasemmanpuoleisen $\mathbb{K}$-kertoimisen vektoriavaruuden.

Yleisemmin:

Määritelmä: Ol. $\mathbb{K}$ rengaskunta. Joukko M varustettuna yhteenlaskulla $M \times M \to M : (A, B) \mapsto A + B$ ja skalaarilla kertomisella $\mathbb{K} \times M \to M : (a, A) \mapsto a \cdot A$ sc M on abelin ryhmä yhteenlaskun suhteen on vasemmanpuoleinen vektoriavaruus jos $\forall a, b \in \mathbb{K}$ $A, B \in M$ pätee

(1) $a(b \cdot A) = (ab)A$

(2) $1 \cdot A = A$

(3) $(a+b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$

(4) $a \cdot (A+B) = a \cdot A + aB$

Huom. Yhtyy täysin tavalliseen vektoriavaruuden määritelmään. Samoin vektorialiavaruus, lin. riippumattomuus, dimensio.

Vastaavasti: $\mathbb{K}$-kertoiminen <u>oikeanpuoleinen vektoriava-ruus</u> asettamalla skalaarilla kertomisen

$$(a, A) \longmapsto A \cdot a \in M_{n,m}(\mathbb{K}) \,!$$

$$(A \cdot a)_{ij} := A_{ij} \cdot a \quad \text{ja}$$

v.a:n määritelmässä

$$(1') \quad (A \cdot a) \cdot b = A \cdot (a \cdot b)$$

$$(2') \quad A \cdot 1 = A$$

$$(3') \quad A \cdot (a + b) = A \cdot a + A \cdot b$$

$$(4') \quad (A + B) \cdot a = A \cdot a + B \cdot a$$

<u>Huom</u> (1') vs. (1) ero ei vain merkinnällinen

A:n kertominen a:lla ja sitten b:llä:

vasemmanpuoleisessa v.a:ssa $\quad b \cdot a \cdot A$

oikean $\quad$ " $\quad$ " $\quad A \cdot a \cdot b$

<u>Määritelmä</u> Ol. V_1, V_2 vasemmanpuoleisia $\mathbb{K}$-ker-toimisia vektoriavaruuksia. Funktio $f : V_1 \to V_2$ on <u>$\mathbb{K}$-lineaarinen</u> jos $\forall\, a, b \in \mathbb{K}$ ja $\underline{x}, \underline{y} \in V_1$ pätee: $f(a \cdot \underline{x} + b \cdot \underline{y}) = a \cdot f(\underline{x}) + b \cdot f(\underline{y})$.

Samastetaan $\mathbb{K}^n = \{(q_1, \ldots, q_n) \mid q_i \in \mathbb{K}\}$ ja $M_{1,n}(\mathbb{K})$ ja tulkitaan $\mathbb{K}^n$ vasemmanpuoleiseksi $\mathbb{K}$-kert. v.a:ksi;

Tämän jälkeen 2 vaihtoehtoa tulkita lin. kuvausten (18.)

ja matriisien $\in M_n(\mathbb{K})$ vastaavuus

<u>Määritelmä</u> Ol. $A \in M_n(\mathbb{K})$. Aset $R_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ja

$L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ s.e. $\forall \, \overline{x} \in \mathbb{K}^n$ pätee:

$$R_A(\overline{x}) := \overline{x} \cdot A$$

$$L_A(\overline{x}) := (A\overline{x}^T)^T$$

<u>Esim.</u> $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \qquad \overline{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$R_A(\overline{x}) = (x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ax+cy,\ bx+dy) \in \mathbb{R}^2$$

ja $$L_A(\overline{x}) = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]^T = (ax+by,\ cx+dy) \in \mathbb{R}^2$$

Os. ensin R_A määrää 1-1 vastaavuuden matriisien $\in M_n(\mathbb{K})$

ja lin. kuvausten $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ välillä:

1.4.1. <u>Lause</u> (1) $\forall \, A \in M_n(\mathbb{K})$ kuvaus

$R_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ on lineaarinen

(2) $\forall$ $\mathbb{K}$-lineaarinen kuvaus $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ vastaa

kuvausta R_A jollakin $A \in M_n(\mathbb{K})$

<u>Tod</u>: (1) $R_A(a\overline{x} + b\overline{y}) = (a\overline{x} + b\overline{y})A = a(\overline{x}A) + b(\overline{y}A)$

$$= a R_A(\overline{x}) + b R_A(\overline{y})$$

(2) Ol. $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ lin. Olk. $\{e_1, \dots, e_n\}$ $\mathbb{K}^n$:n

standardi kanta $e_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, 0, \dots 0)$ ja $A \in M_n(\mathbb{K})$

matriisi, jonka i:s riv on $f(e_i)$. Tällöin

$$f(e_i) = R_A(e_i) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

$$\left(R_A(e_i) = e_i A = (0, \ldots \overset{i.}{1}, \ldots 0) \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_i) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{pmatrix} = f(e_i) \right)$$

f, R_A lin $\Rightarrow f = R_A$. $\square$.

<u>Huom</u> Yleensä samastetaan $A \in M_n(\mathbb{K})$ ja $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ kun $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

1.4.2. <u>Lause</u> Ol. $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

(1) $\forall\, A \in M_n(\mathbb{K})$, $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ on $\mathbb{K}$-lin.

(2) $\forall$ $\mathbb{K}$-lin $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ vastaa kuvausta L_A jollakin $A \in M_n(\mathbb{K})$.

<u>Tod</u>: L.1.4.1 + $L_A = R_{A^T}$ $\forall\, A \in M_n(\mathbb{R})$ tai $A \in M_n(\mathbb{C})$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\quad R_{A^T} \bar{X} = \bar{X} A^T = \underline{(A X^T)}^T = L_A \bar{X} \quad \forall\, \bar{X} \in M_n(\mathbb{K})$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\quad R_{A^T} \bar{X} = \bar{X} A^T = \overline{\bar{X} A^T} = \bar{\bar{X}} A^* = \overline{(A \bar{X}^T)^*}$

$$= (A \bar{X}^T)^T = L_A \bar{X} \quad \forall\, \bar{X} \in M_n(\mathbb{C})$$

<u>Huom</u> 1° Edellä tulkinta $\mathbb{K}^n$ vaakavektoreiden vektoriavaruutena pakottaa käyttämään vastaavuutta

$$A \longleftrightarrow R_A$$

2° Molemmissa vastaavuuksissa matriisikertolasku esittää yhdistetyn kuvauksen matriisia

$$L_A(L_B \bar{X}) = L_A(B \bar{X}^T)^T = \underbrace{(A(B\bar{X}^T))}_{=(AB)\bar{X}^T}{}^T = L_{AB} \bar{X}$$

$$R_A(R_B \bar{X}) = R_A(\bar{X} B) = \bar{X}(BA) = R_{BA} \bar{X}$$

Määritelmä

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \exists B \in M_n(\mathbb{K}) \text{ s.e. } AB = BA = I_n\}$$

on $\mathbb{K}$-kertoiminen yleinen lineaarinen ryhmä.

$GL_n(\mathbb{K})$ ryhmä matriisikertolaskun suhteen.

1.4.3. Lause

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid R_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \text{ lineaarinen isomorfismi}\}$$

Tod: L.1.4.1 (1) $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ R_A lineaarinen, joten se on isomorfismi jos se on bijektio.

Jos $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ja B s.e. $BA = I_n = AB$, niin pätee

$R_A \circ R_B = R_{BA} = R_{I_n} = id_{\mathbb{K}^n}$ ja $R_B \circ R_A = id_{\mathbb{K}^n}$ joten R_A:lla on käänteiskuvaus R_B $\Rightarrow$ "$\subset$".

Ol. $A \in M_n(\mathbb{K})$ s.e. R_A kääntyvä $\Rightarrow$ R_A^{-1} lin. joten L.1.4.1 (2) $\Rightarrow$ R_A^{-1} esitetään matriisin $B \in M_n(\mathbb{K})$ avulla $R_A^{-1} = R_B$, joten $R_{BA} = R_A \circ R_B = id_{\mathbb{K}^n}$

$\Rightarrow BA = I_n$. Samoin $R_{AB} = R_B \circ R_A = id_{\mathbb{K}^n}$ $\Rightarrow AB = I_n$. $\square$.

1.4.4. Lause Jos $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, niin

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\} \quad (\text{L1-L3})$$

$\square$.

Huom L. 1.4.4. ei päde, kun $\mathbb{K} = \mathbb{H}$.

Ol. $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ lineaarinen ja $f = R_A$ jollakin $A \in M_n(\mathbb{K})$, joka esittää $\mathbb{K}^n$:n standardikannassa $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Olk. $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ jokin toinen $\mathbb{K}^n$:n kanta. Jos

$$g = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{K}),$$ niin g on <u>kannanvaihtomatriisi</u>:

$v_i = e_i g \quad \forall i = 1, \dots, n$, joten vektorin

$(c_1, \dots, c_n) \cdot g = (c_1 e_1 + \dots + c_n e_n) g$

$= c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ esitys on $(c_1, \dots, c_n)$ kannassa V.

$\Rightarrow R_g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ standardikannan ja V:n välittävä kuvaus.

$\forall \underline{X} \in \mathbb{K}^n \quad R_g(\underline{X})$ esittää standardikannassa samaa vektoria kuin $\underline{X}$ esittää V:ssä. $R_{g^{-1}}\underline{X}$ esittää V:ssä samaa vektoria kuin $\underline{X}$ standardikannassa ($e_i = v_i g^{-1}$)

1.4.5. <u>Lause</u> gAg^{-1} esittää kuvausta f kannassa V.

<u>Tod</u>: Ol. $\underline{X} = (c_1, \dots, c_n)$, joka esittää vektoria $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ kannassa V. Pitää os:

$R_{gAg^{-1}}(\underline{X})$ esittää vektoria $f\underline{X} = (c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) \cdot A$.

Pätee: $R_{gAg^{-1}}(\underline{X}) = (c_1, \dots, c_n) gAg^{-1}$

$= (c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) A g^{-1} = R_{g^{-1}} (c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) A$

esittää V:ssä samaa vektoria kuin $(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) A$ stand. kannassa. $\square$.

Saadaan: $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ $\forall g \in GL_n(\mathbb{K})$ matriisi gAg^{-1} esittää kuvausta R_A kannassa $\{e_1 g, \dots, e_n g\}$.

Huom. 1° $R_{gAg^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ R_A \circ R_g$

R_g : $V \to$ stand. kanta

R_A : A:n välittämä operaatio

$R_{g^{-1}}$: Stand. kanta $\to V$

2° Kun $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ja esitys L_A:n kautta kun $A \in M_n(\mathbb{K})$ ja $g \in GL_n(\mathbb{K})$:

matriisi $g^{-1}Ag$ esittää kuvausta L_A kannassa $\{ge_1, \dots ge_n\}$ vasemmalta kertomisen kautta:

$$L_{g^{-1}Ag} = L_{g^{-1}} \circ A \circ L_g .$$