Lien ryhmät ja monistot (Mat-1.3531) Harj. 8.
24.3.2006

Peltonen / Dahl

1) Olkoon $d: Sp(1) \to Sp(1) \times Sp(1)$ ehdon $a \mapsto (a,a)$ määräämä kuvaus, $F: Sp(1) \times Sp(1) \to SO(4)$ ehdon $F(g_1, g_2)(v) = g_1 v \overline{g_2}$ määräämä kuvaus, missä $g_1, g_2 \in Sp(1)$ ja $v \in \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$. Mikä kuvaus $SO(3) \to SO(4)$ saa kaavion

$$\begin{tikzcd} Sp(1) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "Ad"'] & Sp(1) \times Sp(1) \arrow[d, "F"] \\ SO(3) \arrow[r, dashed, "?"] & SO(4) \end{tikzcd}$$

kommutoimaan?

2) Esitä $so(4)$ kahden 3-ulotteisen vektorialiavaruuden suorana summana $so(4) = H_1 \oplus H_2$ siten, että H_1 ja H_2 ovat $so(4)$:n ideaaleja. Osoita, että esitys on yksikäsitteinen.

3) Osoita, että $Sp(1) \times SO(3)$ ei ole sileästi isomorfinen $SO(4)$:n kanssa. (Vihje: Sileä isomorfismi määräytyisi derivaattakuvauksesta pisteessä (I, I), joka kuvaisi ideaalit ideaaleiksi)

4) Konstruoi diffeomorfismi avaruuksien $SO(4)$ ja $Sp(1) \times SO(3)$ välille.

5) Olkoon G $O(n)$:n, $U(n)$:n tai $Sp(n)$:n suljettu aliryhmä, $\mathfrak{g}$ G:n Lien algebra ja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ alialgebra. Merkitään $\mathfrak{h}^\perp := \{A \in \mathfrak{g} \mid \langle X, A \rangle = 0 \ \forall X \in \mathfrak{h}\}$.
Osoita: a) Jos $X \in \mathfrak{h}$ ja $A \in \mathfrak{h}^\perp$ niin $[X, A] \in \mathfrak{h}^\perp$.

b) Jos $\mathfrak{h}$ on $\mathfrak{g}$:n ideaali, niin $\mathfrak{h}^\perp$ on on ideaali.