Harj. 7.
17.3.2006

Lien ryhmät ja monistot (Mat-1.3531)
Peltonen / Dahl

1) Olkoon G polkuyhtenäinen matriisiryhmä ja U id-alkion I ympäristö. Osoita, että U generoi ryhmän G l. $\forall g \in G$ on muotoa $g = g_1 \cdot g_2 \cdots g_k$, missä g_i tai $g_i^{-1} \in U$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$, $k \in \mathbb{N}$.

2) Täydennä tehtävän 1 avulla luennolla esitetyn lauseen 8.5.1. todistus tapaukseen, missä alkiot $a \in H$, $b \in G$ ovat mielivaltaisia.

3) Löydetäänkö $u(2)$:lle kanta siten, että $Ad: U(2) \to O(4)$ olisi aiemmin kurssilla määritellyn injektion

$$\rho_2 : M_2(\mathbb{C}) \to M_4(\mathbb{R}), \quad \rho_2(a_{kj} + i b_{kj}) = \begin{pmatrix} a_{kj} & b_{kj} \\ -b_{kj} & a_{kj} \end{pmatrix}$$

rajoittumakuvaus $\rho_2 / U(2)$?

4) Olkoon G polkuyhtenäinen matriisiryhmä ja $H \subset G$ sen polkuyhtenäinen aliryhmä. Olkoot niiden Lien algebrat h ja g, $h \subset g$. Sanotaan, että H on <u>keskeinen</u>, jos pätee $gh = hg$ $\forall g \in G$, $h \in H$. Osoita, että H on keskeinen jos ja vain jos $[X, Y] = 0$ $\forall X \in g$ ja $Y \in h$.

5) Olkoon G matriisiryhmä ja g sen Lien algebra. Ol. $A_1, A_2 \in g$. Osoita, että polulle γ:

$$\gamma(t) = e^{tA_1} e^{tA_2} e^{-tA_1} e^{-tA_2}$$

pätee $\gamma(0) = I$, $\gamma'(0) = 0$ ja $\gamma''(0) = 2[A_1, A_2]$.
(Tulkitse!)