

Pelttonen/Pahl

1) Tutki polkua $\gamma: \gamma(t) = e^{tj}$ avaruudessa $Sp(1) = S^3$.

2) Onko ryhmä $G = \{ g_t = \begin{pmatrix} e^{2\pi t i} & 0 \\ 0 & e^{2\pi 2t i} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \}$ monisto, kun a) $\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}$ b) $\mathbb{Z} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

3) Olkoon G matriisiryhmä. Olkoon G in identtinen komponentti

$$G_0 = \{ g \in G \mid \exists \text{ polku } \gamma: [0,1] \rightarrow G \text{ s.e. } \gamma(0) = I \text{ ja } \gamma(1) = g \}.$$

a) Osoita, että G_0 on matriisiryhmä.

b) Osoita, että G_0 on G in normaali aliryhmä (eli että pätee $gG_0 = G_0g \ \forall g \in G$).

4) Olkoon $\bar{X} \subset \mathbb{R}^m$ monisto ja $T\bar{X}$ sen tangenttikimppu:

$$T\bar{X} := \{ (p, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{2m} \mid p \in \bar{X}, v \in T_p \bar{X} \}.$$

Osoita, että $T\bar{X}$ on monisto ja $\dim T\bar{X} = 2 \dim \bar{X}$.

5) Olkoon $\bar{X} \subset \mathbb{R}^m$ monisto ja $T\bar{X}$ sen yksikkötangentti-
kimppu $T^1\bar{X} := \{ (p, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid p \in \bar{X}, v \in T_p \bar{X}, |v| = 1 \}$.

Osoita, että $T^1\bar{X}$ on monisto ja $\dim T^1\bar{X} = \dim T\bar{X} - 1$.

6) Muodosta diffeomorfismi $SO(3) \rightarrow T^1S^2$.