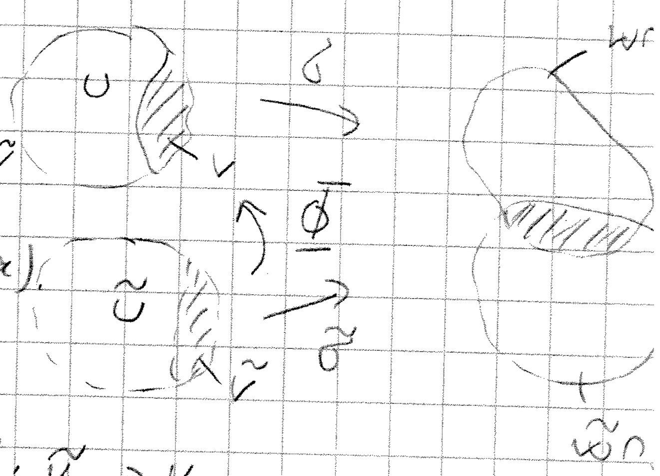
Määritelmä

Ol. $\sigma : U \to S \cap W$, $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \to S \cap \tilde{W}$ pinnan S parametrisointeja.

$\sigma, \tilde{\sigma}$ homeomorfismeja $\Rightarrow$



$V := \sigma^{-1}(S \cap W \cap \tilde{W})$, $\tilde{\sigma}^{-1}(S \cap W \cap \tilde{W}) =: \tilde{V}$

avoimia R^3:ssa ($U, \tilde{U}$ avoimia).

Jos $S \cap W \cap \tilde{W} \neq \emptyset$ saadaan

homeomorfismi $\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma} : \tilde{V} \to V$

parametrisointien σ ja $\tilde{\sigma}$ välinen <u>transitiokuvaus</u>.

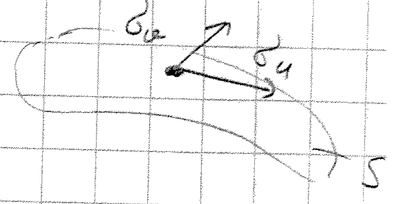
Pätee: $\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sigma(\Phi(\tilde{u}, \tilde{v})) \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{V}$

Määritelmä Parametrisointi $\sigma : U \to R^3$ on <u>säännöllinen</u>

jos se on sileä (= $\exists$ kaikkien kertalukujen jatkuvat osittaisderivaatat) ja vektorit $\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial u}\right)$,

$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial v}\right) \in R^3$ ovat lineaarisesti

riippumattomia (merk. osittaisderivaattoja u:n ja v:n suhteen lyhyesti σ_u, σ_v)



l. $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0 \quad \forall (u, v) \in U$.

Määritelmä <u>Sileä pinta</u> on pinta S, jolla on kartasto, joka koostuu säännöllisistä parametrisoinneista.

Esim 1° $\sigma, \tilde{\sigma}$ S^2:n parametrisointi kuten edellä

$\sigma(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$

$\tilde{\sigma}(\theta,\varphi) = (-\cos\theta\cos\varphi, -\sin\theta, -\cos\theta\sin\varphi)$

selvästi sileitä.

$\sigma_\theta = (-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

$\sigma_\varphi = (-\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0)$

$\Rightarrow \sigma_\theta \times \sigma_\varphi = (-\cos^2\theta\cos\varphi, \cos^2\theta\sin\varphi, \underbrace{-\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi - \sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi}_{= -\sin\theta\cos\theta}$

$\Rightarrow \|\sigma_\theta \times \sigma_\varphi\|^2 = \cos^4\theta\cos^2\varphi + \cos^4\theta\sin^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\theta$

$= \cos^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta = \cos^2\theta$

$\Rightarrow \|\sigma_\theta \times \sigma_\varphi\| = |\cos\theta| \neq 0 \quad \forall \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ joten σ sään.

samoin $\tilde{\sigma}$ sään.

2° $K_+ \cup \{0\}$, $K_- \cup \{0\}$ eivät sileitä pintoja.

$K_+ \cup K_-$ on sileä pinta.

Huom. yleisemmin: jos pinta parametrisoituu sileänä graafina σ $(u,v) \mapsto (u, v, h(u,v))$, missä $h: U \to \mathbb{R}$ sileä, niin se on sileä!

$\sigma_u = (1, 0, h_u)$, $\sigma_v = (0, 1, h_v)$

$\Rightarrow \sigma_u \times \sigma_v = (-h_u, -h_v, 1) \neq 0 \quad \forall h$!

Voidaan osoittaa: sileän pinnan tangenttikuvaukset ovat sileitä (käänteiskuvauslause!)

Käänteinen pätee

<u>1.1. Lause</u> Ol. $U, \tilde{U} \subset_o \mathbb{R}^2$ ja $\sigma: U \to \mathbb{R}^3$ säännöllinen parametrisointi. Jos $\Phi: \tilde{U} \to U$ on sileä diffeomorfismi (= sileä homeomorfismi s.e. Φ^{-1} sileä) niin $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi: \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$ on säännöllinen parametrisointi.

Tod: $\tilde{\sigma}$:n sileys selvä sileiden funktioiden yhdisteenä.

$\tilde{\sigma}_u \times \tilde{\sigma}_v \neq 0$?

Olk. $(\tilde{u},\tilde{v}) \in \tilde{U}$ ja $(u,v) = \Phi(\tilde{u},\tilde{v}) \in U$ (II 1.

ketjusääntö funktioon $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi : \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} = \sigma_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \sigma_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}, \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \sigma_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \sigma_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}$$

$$\Rightarrow \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \sigma_u \times \sigma_v \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} + \sigma_v \times \sigma_u \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}$$

$$= \sigma_u \times \sigma_v \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{vmatrix} = J_{\Phi} \, \sigma_u \times \sigma_v$$

J_{Φ} on Φ:n Jacobin determinantti.

Φ kääntyvä $\Rightarrow J_{\Phi} \neq 0$ $\quad (\Phi \circ \Phi^{-1}(x) = x = \Phi^{-1} \circ \Phi(x) \; \forall$

$$\Rightarrow D\Phi \circ D\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D\Phi^{-1} = (D\Phi)^{-1}$$

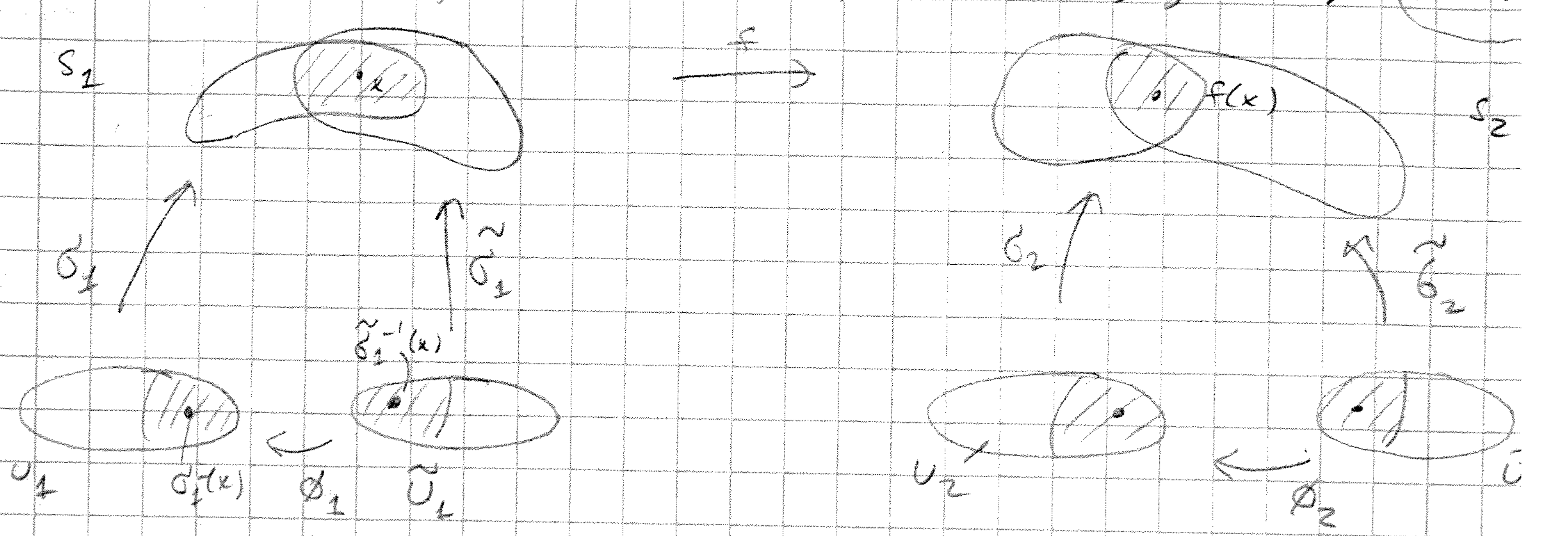
$$\Rightarrow J_{\Phi} = \det D\Phi \neq 0 \;) \quad \Rightarrow \tilde{\sigma} \text{ sään.} \;\square.$$

Sileiden transitiokuvausten välityksellä pintojen välisten kuvausten sileys:

<u>Määritelmä</u> Ol. S_1, S_2 sileitä pintoja. Kuvaus $f: S_1 \to S_2$ on <u>sileä</u> pisteessä $x \in S_1$ jos $\sigma_1 : U_1 \to \mathbb{R}^3$ sileä parametrisointi pisteen x ympärissä, $\sigma_2 : U_2 \to \mathbb{R}^3$ " " " $f(x)$ -"- ja kuvaus $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 : U \to U_2$ (f:n <u>lokaali esitys</u>) on sileä pisteessä $\sigma_1^{-1}(x) \in U \subset U_1$ jollakin U.

Yo. määritelmä riippumaton sileiden transitiokuvausten välittämien karttojen valinnasta: Ol. $\tilde{\sigma}_1 : \tilde{U}_1 \to \mathbb{R}^3$ toinen sileä parametrisointi pisteen $x \in S_1$ ympärissä ja $\tilde{\sigma}_2 : \tilde{U}_2 \to \mathbb{R}^3$

toinen sileä parametrisointi pisteen $f(x)$ ympärissä: II 1.



Tällöin myös $\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1 : \tilde{U}_1 \to \tilde{U}_2$ on sileä:

OL. tunnetuksi transitiokuvausten Φ_1, Φ_2 sileys $\Rightarrow$

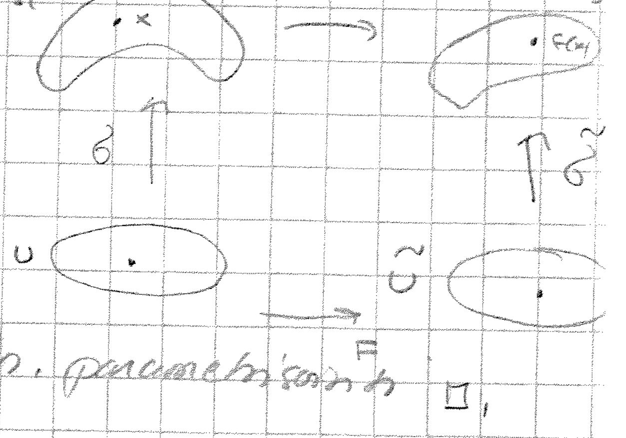
$\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1 = \phi_2^{-1} \circ \sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 \circ \phi_1$ sileä määrittely-

joukossaan.

HT: $f : S_1 \to S_2$, $g : S_2 \to S_3$ sileitä $\Rightarrow$ $g \circ f : S_1 \to S_3$ sileä

1.2 Lause Olkoon $f : S_1 \to S_2$ diffeomorfismi sileiden pintojen S_1, S_2 välillä ja $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ sään. parametrisointi. Tällöin $f \circ \sigma : U \to \mathbb{R}^3$ on sään. parametrisointi.

Tod: Olk. $x \in \sigma(U)$ ja $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$ S_2:n parametrisointi s.e. $f(x) \in \tilde{\sigma}(\tilde{U})$. Tällöin

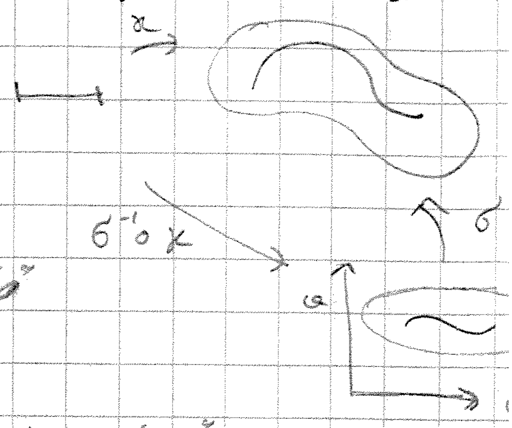


$F := \tilde{\sigma}^{-1} \circ f \circ \sigma : U \to \tilde{U}$ sileä homeomorfismi ja

$F^{-1} = \sigma^{-1} \circ f^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ sileä

L.1.1 $\Rightarrow$ $f \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ F$ sään. parametrisointi $\square$.

Ol. S sileä pinta ja $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ sen parametrisointi ($\boxed{II\ 1.7}$)
Ol. $\gamma : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^3$ sileä polku s.e. $\gamma(\alpha,\beta) \subset \sigma(U)$.
Tällöin
$t \mapsto (\sigma^{-1} \circ \gamma)(t) = (u(t), v(t))$
on sileä tasopolku (HT).

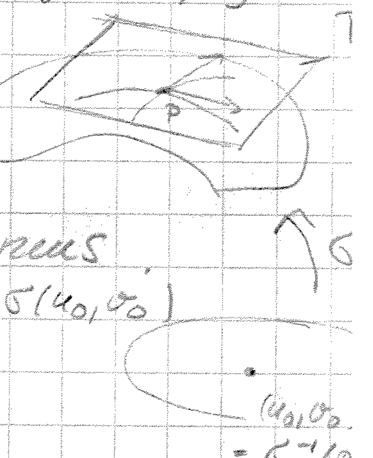


Kääntäen: Jos $t \mapsto (u(t), v(t))$ sileä niin ehto $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ määrää sileän polun pinnalla S.

Toisaalta: $\forall$ polulla $\gamma : (\alpha,\beta) \to S$ kiinteällä $t_0 \in (\alpha,\beta)$
$\gamma(t) \in \sigma(U)$ $\forall\, t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ jollakin kartalla (σ, U)
jollakin $\varepsilon > 0$. $\Rightarrow$ riittää tarkastella muotoa
$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ olevia polkuja (ainakin lokaalisti).

<u>Määritelmä</u> Pisteeseen $p \in S$ kuuluva <u>tangenttiavaruus</u>

$$T_pS := \{ \gamma'(t_0) \mid \gamma : (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \to S \text{ sileä},\ \gamma(t_0) = p \} \quad \varepsilon>0$$



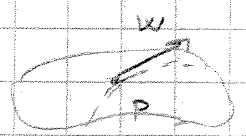
1.3. <u>Lause</u> Ol. $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ pinnan S parametrisointi s.e. $p \in \sigma(U)$ ja (u,v) σ:n välittömät koordinaatit. Tällöin
$T_pS = sp\{\sigma_u, \sigma_v\}$ on $\mathbb{R}^3$:n vektorialiavaruus
Yllä $\sigma_u = \sigma_u(u_0, v_0)$, $\sigma_v = \sigma_v(u_0, v_0)$, $p = \sigma(u_0, v_0)$

<u>Tod</u>: Ol γ sileä s.e. $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$
ketjus $\Rightarrow$

$$\gamma'(t) = \sigma_u u' + \sigma_v v' \in sp\{\sigma_u, \sigma_v\} \Rightarrow \text{"}\subset\text{"}$$

"$\supset$" Ol. $w \in sp\{\sigma_u, \sigma_v\}$ eli $w = \xi\sigma_u + \eta\sigma_v$ jollakin $\xi, \eta \in \mathbb{R}$

aset. $\gamma(t) := \sigma(u_0 + \xi t,\ v_0 + \eta t)$



γ sileä pist $t = 0$, $\gamma(0) = \sigma(u_0, v_0) = p$

$\Rightarrow \gamma'(t) = \sigma_u \xi + \sigma_v \eta$ $\square$.

Huom. Tangenttiavaruuden määritelmä on riippumaton parametrisoinnin σ valinnasta. (HT)

T_pS määrätty 1-käs vektorista $N \perp T_pS$, $\|N\| = 1$.

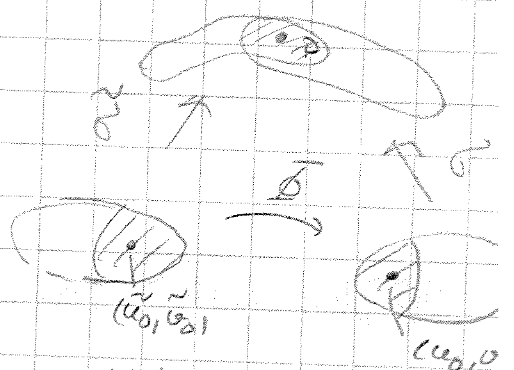
Parametrisoinnin σ välittämä standardi yksikkönormaali määrätty ehdosta $N_\sigma := \dfrac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$.

N_σ määrätty suunnistusta vaille 1-käs: Jos $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ toinen parametrisointi pisteen p ympäristössä, niin L.1.1 tod

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = J_{\Phi}\, \sigma_u \times \sigma_v, \quad \text{missä } p = \tilde{\sigma}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) = \sigma(u_0, v_0)$$

ja $(u,v) = \Phi(\tilde{u}, \tilde{v})$, $\Phi : \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ transitiofunktio

J_{Φ} sen Jacobin determinantti.



$\Rightarrow N_{\tilde{\sigma}} = \pm N_\sigma$.

Määritelmä

Sileä pinta S on suunnistuva jos sillä on kartasto, jonka transitiofunktioille pätee $J_{\Phi} > 0$ aina kun Φ määritelty.

1.4. Lause Sileän suunnistuvan pinnan kartasto määrää pinnan yksikkönormaalin 1-käsitteisesti. □.

Huom 1.4. pätee myös käänteen. $\mathbb{R}^3$:n pinnoille siis: suunnistuvuus $\Leftrightarrow$ pinnan 2-puolisuus.

Tämä ei kuitenkaan päde yleisesti, sillä suunnistuvuus on topologinen ominaisuus ja 2-puolisuus riippuu upotuksesta (esim. HT)