

Harjoitus (9) (Maanantai 7.4.)

1) Mitkä seuraavista polynomeista ovat redusoitumattomia \mathbb{Q} :ssa?

a) $x^4 + 8$

b) $x^3 - 5x + 10$

c) $2x^5 - 5x^4 + 5$

d) $x^4 - 3x^2 + 9$

2) Osoita, että $x^3 + ax^2 + bx + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ on redusoitumaton \mathbb{Z} :ssa jos ja vain jos $a=b$ tai $a+b = -2$.

3) Olkoon $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ ja p alkuluku. Merkitään

$$\overline{f(x)} = \overline{a_0} + \overline{a_1}x + \dots + \overline{a_n}x^n \in \mathbb{Z}_p[x],$$

missä $\overline{a_i}$ on a_i :n jäännös mod p . Kuvauks $\mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_p[x]$, joka kuvaa $f(x) \mapsto \overline{f(x)}$ on surjekttiivinen ryhmähomomorfismi.

a) Osoita, että jos

i) $p \nmid a_n$

ii) $\overline{f(x)} \in \mathbb{Z}_p[x]$ on redusoitumaton \mathbb{Z}_p :ssä

näin $f(x)$ on redusoitumaton \mathbb{Q} :ssa.

b) Osoita, että $x^3 + 4x^2 + 6x + 2$ ja $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x + 1$ ovat redusoitumattomia \mathbb{Q} :ssa.

4) Etsi pienin \mathbb{Q} :n laajennus, joka sisältää polynomin $x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$ juuren.

5) Osoita, että $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ on redusoitumaton \mathbb{Q} :ssa. Etsi, jos mahdollista, \mathbb{Q} :n laajennus K , joka sisältää kaikki $f(x)$:n juuret ja $[K:\mathbb{Q}] = 6$.