**Aalto-yliopisto, Matematiikan ja Systeemianalyysin laitos**

# Tietokoneharjoituksia

---

## mlCurveFit

**1.** Oletetaan, että meille on annettu dataa muodossa $(x_k, y_k).k = 1 \ldots m$, johon muodustuu kaksi murtopisteen erottamaa lineaarista suuntausta. Esimerkiksi

```
x=-2:0.1:4; y=0.2*sin(3*x);
y(x<1)=y(x<1)+0.5*(x(x<1)-1);
y(x>=1)=y(x>=1)+2*(x(x>=1)-1);
```

muodostaa selvän murtopisteen kohtaan $x = 1$. Intuitiivisesti tuntuu selvältä, että tällaiseen dataan kannattaa sovittaa PNS-suoran sijaan paloittain lineaarinen funktio, ts. ”suora murtopisteellä.”

Kirjoita ohjelma joka tekee tämän: ohjelman tulee valita murtopiste $(s, t)$ tasosta hiiren klikkauksen perusteella (kts. vihje) ja sovittaa paloittain lineaarisen funktion dataan tätä murtopistettä käyttäen, ts. sovittaa suoran

$$y = k_1 x + b_1, x < s$$

pisteisiin $(x_k, y_k), x_k < s$ ja suoran

$$y = k_2 x + b_2, x > s$$

pisteisiin $(x_k, y_k), x_k > s$.

**Vihje:** Tehtävän keskeinen osa on murtopisteen valinta ja datapisteiden suodatus.

Murtopisteen valintaan kannattaa käyttää `ginput` funktiota, joka valitsee klikatun pisteen kuvasta tyyliin

```
[x y] = ginput(1);
```

Datan suodatukseen kannattaa käyttää MATLABin loogista indeksöintiä: esimerkiksi valitaan kaikki vektorin  pisteet, jotka ovat pienempiä kuin 5.

```
a = b(b<5);
```

**2.** mlCF01.tex [Maple: ../../mplteht/mplCurveFit/mplCF01.tex]

**Hermiten interpolaatio:** Interpolaatioehdoissa esiintyy myös derivaattoja.

Määritä 4. asteen polynomi $p$, joka toteuttaa ehdot:

$$p(0) = p'(0) = 1, p(1) = p'(1) = p''(1) = 2.$$

(a) Käsittele polynomi lausekkeena.
Tarkista tulos sopivasti `subs`-komennoilla ja piirrä kuva/kuvia polynomista ja derivaatoista.

(b) Käsittele polynomi funktiona.

**Huom:** 5 ehtoa ja 5 tuntematonta kerrointa $\Longrightarrow$ järkevän tuntuinen tehtävä. Yleisesti "järkevälläkään" Hermiten interpolaatiotehtävällä ei aina ole yksikäsitteistä ratkaisua (kuten ei neliömatriisin määräämällä lineaarisella yhtälöryhmälläkään – siitähän on kyse). Pelkkiä funktion arvoja koskevalla interpolaatiotehtävällä aina on (koska "Vandermonden neliömatriisi" on aina ei-singulaarinen).
Tässä opetellaan erityisesti Maplen kätevää ratkaisutekniikkaa.

**Vihje:** Kirjoita polynomi lausekkeeksi tyyliin:

`p:=a*x^4+b*x^3 + .... ,`
missä $a, b, \ldots, e$ ovat määrättävät kertoimet.

Derivaatta: `diff`
Arvojen (x=0,x=1) sijoittaminen p:n lausekkeeseen: `subs`
Yhtälön ratkaiseminen: `solve`

Kaikista saat tietoa näin `?diff`, ...

**3.** Muodosta interpolaatiopolynomi pisteistölle, joka saadaan laskemalla funktion $f(x) = \cos(1 + x^2)$ arvot tasavälisessä x-pisteistössä, jossa on 7 pistettä välillä $[0, 3]$. Piirrä samaan kuvaan funktio, datapisteet (rinkuloilla) ja interpolaatiopolynomi.

**Vihje:** help(doc) polyfit, polyval .

Sinun on tiedettävä, mikä on polynomin asteluku.

Tarkistus: Kulkeeko polynomi kaikkien datapisteiden kautta.

**4.** Kirjoita funktio, jonka otsikko ja "help-kommentit" voisivat olla:

```
function [kertoimet,condnr]=vandinterp(xdata,ydata)
% Funktio laskee interpolaatiopolynomin kertoimet Vandermonden
% systeemin ratkaisulla ja palauttaa my\"os cond-luvun.
%  Esim:
%  xdata=0:5; ydata=xdata.*sin(xdata);
%  [c,cnr]=vandinterp(xdata,ydata);
```

Laske vaikkapa kommenttiesimerkin tapaus ja vertaa polyfit-funktion antamiin kertoimiin. Piirrä data ja interpolaatiopolynomi. Käytä arvojen laskentaan polyval-funktiota.

**Vihje:** Olkoon $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ etsitty polynomi.
Määrätään tuntemattomat kertoimet interpolaatioehtojen $p(x_k) = y_k, k = x_0, \ldots x_n$ avulla saatavasta lineaarisesta yhtälösysteemistä ratkaisemalla.
Kirjoita yhtälöryhmä tässä yleisessä muodossa ja tee ensin Matlab-skripti tyyliin

```
xd=...;
yd=...;
A=...;  % Yht.ryhman matriisi, help/doc vander
a=      % Ratkaisuna saatava kerroinvektori, help slash (a=A\...)d
x=linspace(alkup,loppup); % x-pisteet piirt. varten
y=polyval(...);           % Polynomin arvot x-pisteissa
...
plot(xd,yd,'o')
hold on
plot(x,y)
grid on
```

Tarkistus: Kulkeeko polynomi kaikkien datapisteiden kautta.
Kun skripti toimii, tee sen pohjalta pyydetty funktio. Sovella funktiotasi johonkin tämän tehtäväkokoelman interpolaatiotehtävään.

**5.** Eräs kemiallinen koe tuotti seuraavat datapisteet:

```
tdata=[-1 -0.960 -0.86 -0.79 0.22 0.5 0.93];      % Aikapisteet
ydata= [ -1 -0.151 0.894 0.986 0.895 0.5 -0.306]; % Reaktiotulokset
```

Tarkoitus on estimoida reaktiotulosfunktion $y(t)$ arvoja välillä $[-1, 1]$

1. Piirrä datapisteet.
2. Muodosta interpolaatiopolynomi ja piirrä samaan kuvaan.
3. Muodosta asteita 2,3,4 olevat PNS-polynomit ja piirrä samaan kuvaan
4. Sovita vielä splini ja piirrä samaan.
5. Asettele grafiikkaikkuna paremmaksi vaikka tyyliin:

```
a=min(xdata)-0.1;b=max(xdata)+0.1;
c=min(ydata)-0.1;d=max(ydata)+0.1;
axis([a b c d])
```

Käytä myös `legend`-komentoa ja kokeile `grid on`

**Vihje:**

**Ratkaisu:**`mlCF04ratk.m` [Tulee, numero?]

**6.** a) Piirrä suorat $y = 0.2 - 0.5x, y = 0.2 + 2x, y = -0.3 + 1.5x$ ja $y = 0.95x$.

b) Kirjoita suorat yhtälö$A[x; y] = b$ PNS-mielessä, ja piirrä ratkaisu samaan kuvaan suorien kanssa.

**Vihje:** Samaan kuvaan piirtäminen onnistuu komennolla `hold on`. PNS-ratkaisu tehdään MATLABin backslashilla.

**7.** mlCF07.tex/mplCF07.tex // Matlab,Maple,[Mathematica]

W.A Mozartin(1756-1791) sävellyksiä indeksoidaan Köchel-luvuilla, jotka ilmaisevat teosten sävellysjärjestyksen. Alla on eräitä Köchel-lukuja, ja vastaavien teosten sävellysvuosia.

| Number | Year |
|---|---|
| 1 | 1761 |
| 75 | 1771 |
| 155 | 1772 |
| 219 | 1775 |
| 271 | 1777 |
| 351 | 1780 |
| 425 | 1782 |
| 503 | 1786 |
| 575 | 1789 |
| 626 | 1791 |

Käyttäen tätä dataa, arvioi teoksen Sinfonia Concertanten sävellysvuosi, kun tiedetään, että sen Köchel-numero on 364.

**Vihje:** Piirrä ensin datapisteet tasoon, ja päätä millaista menetelmää kannattaa käyttää. Epäilemättä sopivan asteista PNS-polynomia. Suorita joitakin sovituksia, ja tarkista sitten tulos vaikka Wikipediasta.

**8.** a) Luo dataa seuraavalla skriptillä:

```
r = 0.5+0.5*rand(10,1);
theta =2*pi*rand(10,1)
x = 3*r.*cos(theta);
y = 3*r.*sin(theta);
```

ja piirrä data pisteittäin.

b) Sovitamme dataan ympyrän muotoa $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2$. Ympyrän sovituksessa etsitään kahta arvoa: ympyrän keskipistettä $(c_1,c_2)$, ja sen sädettä $r$. Helpoimmin sovitus onnistuu huomaamalla, että $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2 \Leftrightarrow 2xc_1+2yc_2+(r^2-c_1^2-c_2^2)=x^2+y^2$. Asettamalla $c_3=r^2-c_1^2-c_2^2$, saadaan yhtälö muotoa

$$2xc_1+2yc_2+c_3=x^2+y^2.$$

Tälle yhtälölle voidaan tehdä vaadittu datan sovitus, ja ratkaista arvot $(c_1,c_2,c_3)$, jonka jälkeen $c_3$sta ratkaistaan $r$.

**Vihje:** Pisteittäinen piirtäminen onnistuu komennolla `plot(x,y,'.')`. Ympyrän, jonka keskipiste on $(x,y)$ ja säde $r$, voi piirtää komennolla `plot(x+r*cos(0:0.02:2*pi,y+r*sin(0:0.02:pi)))`.

**9.** Maple tai Matlab
Tutkitaan nk. Rungen ilmiötä. Laske funktion $g(x) = 1/(1+x^2)$ arvoja tasaisin välein väliltä $[-5, 5]$, ja tee näihin pisteisiin perustuva polynominen interpolaatio. Piirrä sekä $g(x)$ että $P(x)$ samaan kuvaan. Mitä huomaat, kun valittujen datapisteiden määrää tihennetään?

Kokeile interpolointia silloin, kun datapisteitä ei valita tasavälisesti, vaan ne valitaan Chebyshev-pisteiden

$$x_j = 5\cos(\frac{j\pi}{N}), j = 0 \ldots N$$

mukaan.

**Vihje:** Polynominen interpolaatio kannattaa tehdä MATLAB-funktiolla `polyfit`. Funktio $g$ kannattaa määritellä funktiokahvan avulla: `g = @(x)1./(1+x.^2)`. Tasavälisiä pisteistä saa funktiolla `linspace`

Sopii aivan yhtä hyvin Maplelle.

**10.** H2T14.tex/mlCF13.tex/mplCF13.tex
Matlab,Maple,[Mathematica]

Yhdysvaltojen perustuslaki vaatii, että maassa suoritetaan joka kymmenes vuosi väestönlaskenta. Ohessa on väestönlaskennan tuloksia sadoissa miljoonissa asukkaissa viime vuosisadalta.

| 1900 | 1910 | 1920 | 1930 | 1940 | 1950 | 1960 | 1970 | 1980 | 1990 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 76 | 92 | 106 | 122 | 132 | 150 | 179 | 203 | 226 | 248 |

Tee polynomi-interpolointi datalle, ja ennusta väestön määrä vuonna 2010. Kuinka ennusteesi suhtautuu laskennan todelliseen tulokseen: 308,745,538 laskettua asukasta?

Sovita myös eriasteisia PNS-polynomeja, vrt. Matlab Censusgui, lue Molerista: `http://www.mathworks.se/moler/interp.pdf` Num. Comp. with Matlab, interpolation

**Vihje:**

**11.** mlCF15.tex [Maple: ../../mplteht/mplCurveFit/mplCF03.tex]

**Opettajalle**: *(a)-kohta sopii ensitutustumiseen.*
*(b)-kohta on sikäli huono, että virhetermin suuruusluokka on toisesta maailmasta (opettavaista kylläkin, mutta alkajaisiksi vaatii ainakin varoituksen).*
*Lisää tehtävän opetuksia ratkaisutiedostoissa.*

(a) Muodosta interpolaatiopolynomi pisteistölle, joka saadaan laskemalla funktion $\cos(1+x^2)$ arvot tasavälisessä x-pisteistössä, jossa on 7 pistettä välillä $[0,3]$.Piirrä samaan kuvaan funktio, datapisteet ja interpolaatiopolynomi.

(b) Arvioi (Lagrangen) interpolaatiokaavan virhetermin avulla interpolaatiovirheen yläraja yo. välillä ja vertaa todelliseen.

**Lause** Olkoot $x_0, x_1, \ldots, x_n$ erilliset pisteet ja $f$ $(n+1)$ kertaa jatkuvasti derivoituva funktio $x_k-$pisteet sisältävällä välillä. Jos $p_n$ on (1-käs) dataan $(x_k, f(x_k))$ liittyvä interpolaatiopolynomi, niin

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

**Vihje:** Tässä on mahdollista harrastaa Maplen ja Matlabin yhteistyötä. Virhekaavan derivaatta muodostetaan tietysti Maplella ja lauseke sievennetään. Itse asiassa piirtämällä ja poimimalla kuvasta maksimipisteen koordinaatit, saadaan riittävän hyvä arvio.
Toinen mahdollisuus on käyttää Matlabin symbolic toolboxia.

Tulotermin voisi hoitaa tehokkaimmin Matlabissa ottamalla tiheän diskretoinnin ja käyttämällä max-funktiota. Maplessakin on max-funktio, lakenta on Matlabissa tehokkaampaa.
Miten tulotermi lasketaan Matlabissa? Vaikka tähän tapaan:
1. `x=linspace(....,N)`
2. Tedään matriisi X, jossa x-vektoreita allekkain n+1 kpl.
3. Tehdään matriisi X0, jossa rivit

```
x0 x0 ... x0   N kpl.
x1 x1 ... x1   N kpl.
 ...
xn xn ... xn   N kpl.
```

Nämä syntyvät vaikka `meshgrid`-komennolla tai ulkotuloilemalla ykköspystyvektorilla.
4. Vähennetään matriisit ja `prod())`. Sitten vain `abs` ja `max` kehiin.

Tosi Matlabmaista! (Ei moitita, vaikka tekisit for-loopin, vain 8 kertaa käydään, mutta hyvä ymmärtää Matlabin hienoa matriisiajattelua, muistiahan ei nykyisin tarvitse säästellä.)

**Avainsanat:** Interpolaatio, käyrän sovitus, interpolaatiovirhe, Lagrange

**12.** mlCF16.tex

Kuvitteellinen koe tuotti seuraavat tulokset. Tulosten perusteella tehtiin hypoteesi, jonka mukaan pisteet noudattelevat paloittain vakiota funktiota, jolla on yksi murtopiste, toisin sanoin, funktio, joka koostuu kahdesta vakio-osasta . Testaa hypoteesi sovittamalla paloittain vakio funktio dataan käyttämällä pienimmän neliösumman menetemää.

| t | b |
|---|---|
| 0.0 | 0.9 |
| 0.1 | 1.01 |
| 0.2 | 1.05 |
| 0.3 | 0.97 |
| 0.4 | 0.98 |
| 0.5 | 0.95 |
| 0.6 | 0.01 |
| 0.7 | -0.1 |
| 0.8 | 0.02 |
| 0.9 | -0.1 |
| 1.0 | 0.0 |

**Vihje:** Tehtävä kannattaa aloittaa graafisella tarkkailulla, ja määritellä silmämääräinen murtopiste. Tämän jälkeen on helppo muodostaa minimoitavat yhtälöt.

**13.** mlCF20.tex

**Pienimmän neliösumman sovitus, PNS, LSQ**

Lineaarialgebra-osioissa on aiheesta myös joitakin perustehtäviä.

Tähän tiedostoon kootaan laskaripaperiin sopivia pikaohjeita ja mielen virkistyksiä.

- .
- ..
- ...

**14.** mlCF21.tex (Kirjasta *Fröberg*: Numerical Analysis 1985)
Joulukuun 1–28 päivänä 1981 aurinko laski *Lund*:ssa klo 15.30:n ja 15.45:n välillä seuraavan taulukon mukaisesti, missä x tarkoittaa päivää ($1 \leq x \leq 28$) ja y minuuttimäärää klo 15.30:n jälkeen, jolloin aurinko laski.

| x | y | x | y |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 19-21 | 3 |
| 2 | 7 | 22-23 | 4 |
| 3 | 6 | 24 | 5 |
| 4-5 | 5 | 25 | 6 |
| 6-7 | 4 | 26-27 | 7 |
| 8-9 | 3 | 28 | 7 |
| 10-18 | 2 | | |

Data voidaan esittää varsin hyvin 2. asteen polynomilla. Määritä kertoimet $a_0, a_1, a_2$, piirrä data ja polynomi. Minä päivänä auringonlaskuaika saavuttaa miniminsä mallin mukaan.

## mlDifferentiaali(yhtälöt)

**15.** mlD001.tex (iv3 harj.1 av 2001)
Tätä tehtävää harjoitellaan Matlab-teknisesti loppuviikon harjoituksissa. Osattava esittää (ke 19.9.) liitutaululla käsin piirtäen periaatteessa.

Tarkastellaan diffyhtälöä $y' = y - x$ alueessa $-1 \leq x, y \leq 1$,

Piirrä $xy$-koordinaatistoon suuntakenttä ja isokliinejä käsin ja kokeile myös Matlabia laskimen roolissa. Ota hilaväliksi aluksi vaikka $h = 0.5$.

Matlab-laskussa kannattaa muodostaa matriisi, sanokaamme K, jonka alkioina ovat arvot $y_i - x_j$, $i = 1 \ldots 5, j = 1 \ldots 5$ tähän tapaan:

```
h=0.5; t=-1:h:1;x=0:h:2
for i=1:5
  for j=1:5
    K(i,j)=y(i)-x(j)
  end
end
```

Koska matriisissa rivi-indeksi i juoksee alaspäin, on helpompaa sijoittaa arvot koordinaatistoon kääntämällä matriisin sarakkeet ylösalaisin; tämä tapahtuu komennolla `flipud`. Katso siis matriisista `flipud(K)` arvot ja merkitse ne kynällä piirrokseen. Tarkista käsin (tai “skalaarilaskimella” (Matlabkin käy)) muutama alkio ainakin. (Hilan tihentäminen käy nyt helposti muuttamalla vain yllä $h$:ta.)
Myöhemmin opimme, että K-matriisin muodostaminen käy kätevämmin, tehokkaammin ja rutiininomaisemmin näin:

```
x=...;y=...  % Kuten edellä
[X,Y]=meshgrid(x,y);
K=Y-X;    % Jos esiintyy kertolaskua, potenssia ym.,
          % on varustettava pisteellä, siis
          %     .*, .^  ./  (taulukko-operaatiot)
```

Nyt meillä on kaikki data kerättynä suuntakentän piirtämistä varten. Voit katsoa skriptiä suuntak1.m alla aputiedostossa ja miettiä, mitä siinä tapahtuu. (myös: `http://www.math.hut.fi/teaching/v/matlab/suuntak1.m`)

Lopuksi voit kokeilla LAODE-funktiota `dfield8` (versio v. 2012) , jonka käyttö ei vaadi Matlabin tuntemista lainkaan. `http://math.rice.edu/~dfield/`

**Avainsanat:** matlabDiffyhtälöt, mlbDifferentiaali,suuntakenttä
**Viitteet:** `[LAODE]` Golubitzky-Dellnitz: Linear Algebra and Differential Equations using Matlab, Brooks/Cole 1999.

**16.** mlD002.tex [vastaava Maple: ...mplD003.tex] (iv3/2001, harj. 1)

Millä xy-tason käyrillä on ominaisuus: Käyrän tangentin kulmakerroin jokaisessa pisteessä $(x, y)$ on $-\frac{4x}{y}$ ?

Ratkaise yhtälö muuttujien erottelulla ("separation of variables"). Piirrä suuntakenttä isokliineja apuna käyttäen käsin vaikkapa alueessa $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

Kokeile myös LAODE-funktiota dfield8. Tässä on käytettävä ahkerasti stop-näppäintä, ratkaisu ajautuu aina ongelma-alueelle, mikäli x-akseli on mukana.

Voit myös täydentää kuvaa alussa laskemillasi ratkaisukäyrillä tyyliin:

```
x=linspace(-2,2,30);y=x; [X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=... % muista pisteitt\"aiset laskutoimitukset.
contour(x,y,Z,1:10); shg
```

Kokeile ja selitä!

**Vihje:** Hae m-tiedosto *dfield8* sivulta `http://math.rice.edu/~dfield/` ja sijoita se Matlab-polkusi varrelle.
Kirjoita Matlab-istuntoon : `dfield8`

**Avainsanat:** MatlabDy, diffyhtälöt, suuntakenttä, isokliinit, mlDifferentiaali(yhtälöt)

**Viitteet:**

`[LAODE]` Golubitzky-Dellnitz: Linear Algebra and Differential Equations using Matlab, Brooks/Cole 1999.

**17.** mlD003.tex (iv3/2001, harj. 1, teht. 3) (Jatkoa: mlD007.tex)
Lisääntymiskykyinen populaatio, jonka lisääntymistä rajoittavia tekijöitä ei ole, noudattaa yleensä likimain *Malthus'n* lakia, ts. nykyhetkellä kasvunopeus on verrannollinen populaation nykykokoon.

Muodosta ilmiölle differentiaaliyhtälömalli ja ratkaise.

Ratkaisussa esiintyy vakiot $y_0$ = populaation koko alkuhetkellä ja $k$ = "lisääntymiskykyvakio".

Täydennämme vanhaa tuttua USA:n väkilukutaulukkoa arvoilla, jossa toinen rivi ilmaisee väkiluvun miljoonissa ja ensimmäinen vuosiluvun.

```
1800    1830      1860     1890    1920    1950    1980
5.3      13        31       63      106     150     230
```

a) Määritä $k$ kahden ensimmäisen datasarakkeen avulla. Tutki, mihin vuosilukuun saakka malli antaa siedettävän tuloksen ja mistä alkaen sietämättömän.

b) Määritä $k$ ensimmäisen ja viimeisen datasarakkkeen perusteella (jolloin kyseessä ei enää ole tulevaisuuden ennustaminen), ja tutki tämän mallin käyttäytymistä muissa datapisteissä.

c) Havainnollista kuvilla, käytä tarpeen mukaan logaritmista skaalaa.

**Vihje:** Voit valita ajan 0-hetken vuosiluvuksi 1800 (miksi?). Toki ei mitenkään välttämätöntä.

**Avainsanat:**MatlabDy, diffyhtälöt, mlDifferentiaali(yhtälöt), populaationkasvumalli, *Malthus'n* laki

**Vastaavanlaisia tehtäviä:** `http://matriisi.ee.tut.fi/~piche/ode/` Pichet: TTY 1999, course 73107 (hyvä kokonaisuus):

1) Perusesim tähän kohtaan: *In 1980 the population of Altlantia was 254512; in 1995 it was 294726. What is its population in 2000.* (Vuosilukuihin voisi lisätä nyt vaikka 15.)

2) Jatkoa: mlD007.tex

**18.** mlD004.tex [Maple-versio: ...mplD004.tex] (iv3/2001, harj. 1, LV teht. 1-2)

Laskuvarjohyppääjän yhtälö. Oletetaan, että hyppääjän + varustuksen massa = $m$ ja ilmanvastus on verrannollinen nopeuden neliöön, olkoon verrannollisuskerroin = $b$. Tällöin Newtonin 2. laki antaa liikeyhtälön:

$$mv' = mg - bv^2.$$

Olkoon yksinkertaisuuden vuoksi $m = 1, b = 1$ ja $g = 9.81m/s^2$.

Piirrä suuntakenttä.

Oletetaan, että laskuvarjo aukeaa, kun $v = 10m/s$, valitaan tämä alkuhetkeksi $t = 0$. Piirrä tämä ratkaisukäyrä suuntakenttäpiirrokseen. Yritä nähdä suuntakentästä, että kaikki ratkaisut näyttävät lähestyvän rajanopeutta $v \approx 3.13$ ja että ratkaisut ovat joko kasvavia tai pieneneviä (ja millä alkuarvoilla mitäkin, ja mitä tarkoittaa fysikaalisesti)

Määritä rajanopeus suoraan yhtälöstä.

Käytä Matlab-piirroksiin funktiota `dfield8` ja Maplessa DEtools-kirjaston DEplot-funktiota.

**Vihje:** Kts. [HAM] ss. 169-170 tai `?DEplot`

```
> with(DEtools)
> with(plots)
```

Suuntakenttään:*DEplot*,
grafiikkojen yhdistämiseen: *display*.
dfield-ohje:

Hae m-tiedosto *dfield8* sivulta `http://math.rice.edu/~dfield/` ja sijoita se Matlab-polkusi varrelle.
Kirjoita Matlab-istuntoon : `dfield8`

**Avainsanat:** MatlabDy, MapleDy, diffyhtälöt, suuntakenttä, isokliinit, mplDifferentiaali(yhtälöt), mlDifferentiaali(yhtälöt)

**Viitteet:** `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998

**19.** mlD005.tex (Pichet Course 73107)
Määritä diffyhtälön

$$x' = x^2 - t\,x + 4t$$

suuntakenttä ja pisteen $(x, t) = (-1, -1)$ kautta kulkeva ratkaisukäyrä graafisesti funktion *dfieldxx* avulla, missä $xx = 8$ (v. 2012).
Mikä on tämän funktion minimipisten likiarvo (vaikka 2:n tai 3:n numeron tarkkudella).

**Vihje:** Hae m-tiedosto *dfield8* sivulta `http://math.rice.edu/~dfield/` ja sijoita se Matlabpolkusi varrelle.
Kirjoita Matlab-istuntoon : `dfield8`
Kun sinulla on yhtälö, suuntakenttä ja ratkaisukäyrä, voit valita `Edit/Zoom in`, jolla pääset tarkentamaan minipisteen hakua (askeleen kerrallaan).
Ennen minimin hakua kannattaa poistaa piirtämäsi ratkaisukäyrät `Options/Erase solutions`, niin `Options/Keyboard input`-valinnalla voit antaa tarkan alkuarvon.

**Avainsanat:**MatlabDy, diffyhtälöt, mlDifferentiaaliyhtälöt, suuntakenttä, dfield8

**20.** mlD006.tex
Kun Marsiin laskeutuvan luotain laukaisee laskeutumisrakettinsa, sen nopeutta kuvaa differentiaaliyhtälö

$$\frac{dV}{dt} = g_m - \frac{k}{m} V^2,$$

missä $g_m = 3.688$ on Marsin painovoimakerroin, $k = 1.2$ on aerodynaaminen vastusvoima, ja $m = 150$ on luotaimen massa kilogrammoissa. Käytä vapaan pudotuksen rajanopeutta alkuarvona (Marsissa rajanopeus on 67.056 m/s), ja ratkaise yhtälö välillä $[0 : 0.05 : 6]$. Piirrä sekä nopeuden että kiihtyvyyden kuvaajat.

**Vihje:**

**21.** mplD017.tex, mlD007.tex

Huomasimme, että eksponentiaalinen kasvumalli, ns. *Malthus'n laki* $y' = ky$ ei toimi USA:n väestödataan pitkällä aikavälillä. Mallia voidaan tarkentaa lisäämällä sopiva kasvua rajoittava termi, tällöin johdutaan ns. logistiseen kasvulakiin:

$$y' = ay - by^2$$

USA:n väestödataan liityen *Verhulst* arvioi v. 1845 arvot $a = 0.03$ ja $b = 1.610^{-4}$, kun $t$ mitataan vuosissa ja väkiluku $y(t)$ miljoonissa.

**Opettajalle:** Tehtävä voidaan käsitellä ehkä luontavamminkin kokonaan erillisenä numeeristen diffyhtälöratkaisujen opetuksesta. Tällöin otetaan vain alla olevat kohdat (c) ja/tai (d).

(a) Ratkaise tehtävä ($y(0) = 5.3$) Eulerin menetelmällä käyttämllä askelpituussa $h = 10$

(b) rk4:llä käyttäen n. nelinkertaista askelta (voit kokeilla pienempiäkin)

(c) Matlabin `ode45`:llä.

(d) Laske analyyttinen ratkaisu Maplella (kyseessähän on *Bernoullin yhtälö*.

Piirrä kuvia ja laske kaikissa tapauksessa ratkaisujen arvot annetuissa taulukkopisteissä. (ode45-tapauksessa onnistuu ainakin sovittamalla dataan splini funktiolla spline, joka on maailman helppokäyttöisin.)
kts. `http://www.math.hut.fi/teaching/v/matlab/opas.html#splinit`
(Nykyään (2012) ei tarvita erillistä splinisovitusta, laskentapisteet voidaan antaa suoraan ode45-funktiolle syötteenä.)

**Vihje:**

```
function [T,Y]=eulerS(f,Tspan,ya,n)
% Tämä vain kehittely- ja opettelutarkoituksessa.
% Funktio eulerV hoitaa niin skalaari- kuin vektoriversion.
%  (24.2.04, modifioitu 21.8.2010)
% Esim: y'=t+y, y(0)=1
%       f=@(t,y)t+y
%       [T,Y]=eulerS(f,[0 4],1,6), plot(T,Y,T,Y,'.r');shg
a=Tspan(1);b=Tspan(2);
h=(b-a)/n;
Y=zeros(n+1,1);T=(a:h:b)'; %Pystyvektorit yhdenmukaisesti ode45:n
Y(1)=ya;                   %  kanssa
for j=1:n
   Y(j+1)=Y(j)+h*f(T(j),Y(j));
end;
```

## Viitteitä:

`http://math.aalto.fi/opetus/kp3-ii/06/L/L14dynumkalvot.pdf`
`http://www.math.hut.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/esim/eulerS.m`
(Listaus yllä)

**22.** mlD008.tex,mplD018.tex
Tarkastellaan yhtälöä $y' = -2\alpha(t-1)y$. Ratkaise aluksi analyyttisesti (saat käyttää Mapleakin.)

Totea kuvasta ja derivaattaehdosta yhtälön stabiilisuus/epästabiilisuusalueet. Ota kuvassa ja aina tarvittaessa vaikkapa $\alpha = 5$.
Ratkaise yhtälö sekä Eulerilla että BE:llä. Sopivia arvoja voisivat olla vaikkapa $h = 0.2$, väli: $[1, 4.5]$, $y(1) = 1$.
Vertaa kokeellisesti stabiilisuukäyttäytymistä teorian ennustamaan ja pane merkille, miten epästabiilisuus käytännössä ilmenee.
Tämä tehtävä soveltuu erityisen hyvin Maplella tehtäväksi, se on pitkälle ideoitu [HAM] sivulla 124, myös Euler ja BE ovat valmiina. (Koodit saa kurssin maple-hakemistosta.) ** Tulee aputiedostoon **

** apu puuttuu, editoi viitteet! **

**Vihje:**

**Viitteitä:**

`http://math.aalto.fi/opetus/kp3-ii/06/L/L14dynumkalvot.pdf`
`http://www.math.hut.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/esim/eulerS.m`
(Listaus yllä)

**23.** Maple,Matlab (H2T10)

a) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' - y = \cos x, \quad y(0) = 1$$

analyyttisesti Maplella ja numeerisesti Matlabilla. Piirrä ratkaisukäyrä.

b) Anna alkuarvoksi symboli $c$ ja piirrä ratkaisukäyräparvi sopivalla välillä, kun $c = -0.9, -0.8, \ldots, 0$.

Miltä parvi näyttää suurilla $x$ :n arvoilla. Tässä pitäisi erottua kolmenlaista käytöstä.

**Vihje:** Maple: dsolve, Matlab: ode45

**Avainsanat:** Differentiaaliyhtälö, alkuarvotehtävä, analyyttinen ratkaisu, numeerinen ratkaisu.

**24.** mplD007.tex (iv3/2001, harj. 2, AV teht. 1)
Ratkaise (AA)-tehtävä $y' - 2xy = 1, \quad y(0) = -0.5$

Tässä näyttää siltä, että (EHY):n erikoinen olisi helppo löytää, mutta huomaat pian, että luonnolliset yritteet eivät toimi. (Kyseessähän on lineaarinen, mutta ei-vakiokertoiminen yhtälö.)

Ratkaise vaan sitten kiltisti integroivan tekijän menettelyllä.

Integrointi johtaa *erf*-funktioon, Maple antaa sen suoraan, voit myös konsultoida KRE-kirjaa hakusanalla *erf*. Lausu siis ratkaisu *erf*:n avulla.

Piirrä suuntakenttäpiirros Maplen `DEtools`-pakkauksen `DEplot`-funktion avulla (kts [HAM] s. 169), voit toki käyttää myös Matlab:n dfield8-funktiota (ohje alla).

Valitse alkuarvoja $y_0$ väliltä $(-1, -0.5)$ yrittäen löytää kriittistä arvoa $y_0$, joka jakaa ratrkaisukäyrät plus tai miinus ääretöntä lähestyviin. (Tuo kriittinen ratkaisukäyrä on rajoitettu.) Käytä hyväksesi *erf*-funktion ominaisuutta $\lim_{x\to\infty} erf(x) = 1$ laskeaksesi tarkan arvon $y_0$:lle.

**Vihje:** dfield-ohje: Hae m-tiedosto *dfield8* sivulta `http://math.rice.edu/~dfield/` ja sijoita se Matlab-polkusi varrelle.
Kirjoita Matlab-istuntoon : `dfield8`

**Avainsanat:** MapleDy, diffyhtälöt,erf, mplDifferentiaali(yhtälöt)

**Viitteet:** `[KRE]` E. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics, Wiley
`[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

**25.** a) Piirrä tasokäyrä $(x, y) = (e^{-t/20} \cos t, e^{-t/10 \sin t})$ (faasitaso).

b) Piirrä edelliset koordinaattikäyrät $x(t)$ ja $y(t)$ (aikataso).

**Vihje:** Muista (`.*`), kun muodostat vektorilausekkeita. kokeile eri parametrivälejä. Kokeile `linspace(a,b,n)`:ssä muitakin kuin oletusarvoa $n = 100$. Käytä `axis`-komentoa. Ja kysele `help`:llä.
Uusi grafiikkaikkuna: `>> figure`, Useampia samaan kuvaan: `>> hold on`

**Avainsanat:** Differentiaaliyhtälöryhmä, aikakuva,faasikuva,grafiikka,plot

**26.** Ratkaise toisen kertaluvun alkuarvotehtävä

$$y''(t) - 0.05y'(t) + 0.15y(t) = 2t; y'(0) = 0, y(0) = 0.$$

**Vihje:** Voi olla avuksi määritellä $y_1 = y, y_2 = y'$, jolloin toisen kertaluvun tehtävä muuttuu ensimmäisen kertaluvun systeemiksi

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -ay_2 - by_1 + 2t \end{cases} .$$

**27.** Eulerin menetelmä on klassinen menetelmä differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi. Menetelmän lähtökohtana on yhtälö

$$y'(t) = f(t, y(t)); y(t_0) = y_0,$$

josta koetetaan ratkaista $y(t)$ kun $t = [t_0, t_n]$. Menetelmä perustuu $t$:n diskretoinnille: $t$ muunnetaan joksikin vektoriksi $T = (t_0, t_0 + h, \ldots, t_n)$, jonka jälkeen koetetaa etsiä vastaavia arvoja $y(t_0 + ih)$. Merkintöjen selvyyden vuoksi kirjoitetaan $t_0 + jh = t_j$. Eulerin menetelmässä approksimoidaan arvoa $y(t_i)$ seuraavasti:

$$y(t_i) = y(t_{i-1}) + h\, f(t_{i-1}, y(t_{i-1})).$$

Ratkaise Eulerin menetelmällä differentiaaliyhtälö

$$y'(t) = y(t)\sin(t).$$

Käytä eri $h$:n arvoja, ja vertaa oikeaan ratkaisuun $e^{1-\cos(t)}$.

**Vihje:** Eulerin menetelmä MATLABissa on helpointa toteuttaa yksinkertaisena silmukkana. Olettaen, että yhtälön oikea puoli on kirjoitettu funktioon `f(t,y)`, Euler-iteraatio voidaan tehdä seuraavasti:

```
for n = 2:length(t)
    y(n) = y(n-1)+h*f(t(n-1),y(n-1));
end
```

missä $t$ on vektori joka on ratkaisuvälin diskretointi, ja $h$ on $t$:n pisteiden välinen etäisyys.

**28.** Rungen-Kutan menetelmä differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi on huomattavasti kehittynyt versio Eulerin menetelmästä. Menetelmässä määritellään seuraavasti:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1), \\ k_3 &= f(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3). \end{aligned}$$

Diskretointiaskeleeksi tulee nyt

$$y_{n+1} = y_n + hk = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

a) Ratkaise edellisen tehtävän yhtälö

$$y'(t) = y(t)\sin(t); y(0) = 1.$$

käyttämällä Rungen-Kutan menetelmää. Vertaa tulosta sekä todelliseen ratkaisuun $y(t) = e^{1-cos(t)}$, että Eulerin menetelmällä saavutettuun. Mitä huomaat tarvittavasta askelkoosta?

b) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'(t) = \sqrt{1 - y^2}; y(0) = 0$$

käyttämällä Rungen-Kutan menetelmää.

**Vihje:**

**29.** Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \rho y \\ \frac{dy}{dt} = \sigma x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -\beta z + xy \end{cases}$$

numeerisesti välillä $[0, 20]$, kun $\sigma = 10, \rho = 28$ ja $\beta = 8/3$. Piirrä ratkaisukäyrät samaan kuvaan, ja piirrä käyrät $x(t)$ ja $z(t)$ parametrisesti. Tämän jälkeen piirrä 3-ulotteinen parametrisoitu käyrä kaikista koordinaateista.

Onko ratkaisu rajoitettu? Suppeneeko se kohti jotain arvoa?

Kokeile muuttaa alkuarvoja, sekä parametrien arvoja. Vallitsevan teorian mukaan systeemi on *kaoottinen dynaaminen systeemi*, jonka käyttäytyminen voi muuttua merkitsevästi jo pienistä muutoksista lähtötilanteessa; itse asiassa termi perhosvaikutus keksittiin kuvaamaan juuri tämän systeemin käytöstä.

**Vihje:** Kolmiulotteinen parametrisoitu käyrä (tai pistejoukko) piirretään MATLABissa funktiolla `plot3`.

**30.** Kirjoita heiluriyhtälö $\Theta'' + \frac{g}{L}\sin(\Theta) = 0$ ensimmäisen kertaluvun systeemiksi ja samantien Matlab-funktioksi (joko inline tai m-tiedosto). Voit ottaa $g/L = 1$.

Laske ratkaisu sopivalla aikavälillä (esim. $[0, 10]$) ja kolmella erilaisella alkuarvolla, joilla saat erityyppiset ratkaisut. Käytä `ode45`-funktiota.

Piirrä ratkaisukäyrät aikatasoon ja trajektorit faasitasoon.

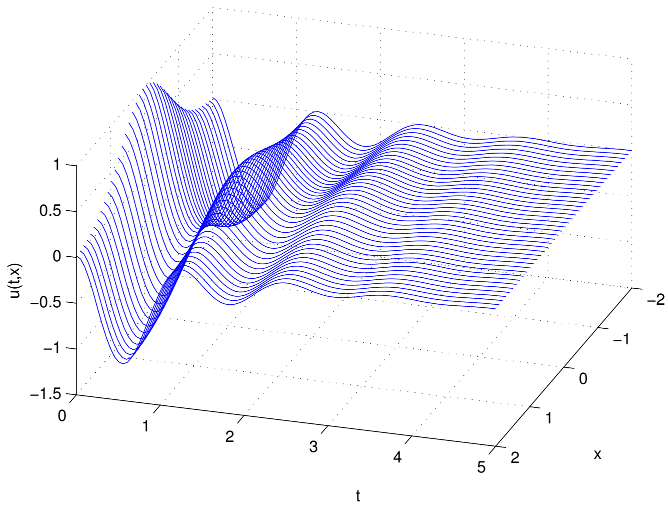
**31.** **Reuna-arvotehtävä tähtäysmenetelmällä** (Moler odes teht. 7.19 ss. 45–47.) Olkoon ratkaistavana reuna-arvotehtävä $y'' = y^2 - 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$. Tee Matlab-funktio, joka ottaa argumentikseen "alkunopeuden"0:ssa ja palauttaa vastaavan AA-tehtävän ratkaisun arvon 1:ssä, vähennä siitä vielä 1, niin sinulla on funktio, jota sopii tarjota `fzero`:lle.

**32.** Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -u - 5e^{-t}\sin(5t)$$

nelikulmiossa $[0, 5] \times [-2, 2]$, alkuarvokäyrällä $u(0, x) = e^{-x^2}$.

Piirrä tuloksista kuva:




**Vihje:** Määrittele ensin sopivan harva diskretaatio välille $[-2, 2]$, ja sen jälkeen tähän diskretaatioon sopiva alkuarvokäyrä, sen jälkeen ratkaise differentiaaliyhtälö numeerisesti (`ode45`) vuoroittain kullekin alkuarvolle.

**33.** Ratkaise nk. *Rösslerin systeemi*

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2(t) - y_3(t), \\ y_2'(t) = y_1(t) + ay_2(t), \\ y_3'(t) = b + y_3(t)(y_1(t) - c), \end{cases}$$

missä $a, b, c$ ovat parametreja, välillä $t \in [0, 100]$. Käytä alkuarvoja $y(0) = [1, 1, 1]^T$ ja $(a, b, c) = (0.2, 0.2, 2.5)$.

Kyseessä on kaoottinen systeemi, ts. ratkaisurata riippuu suuresti joko alkuarvoista ja parametreista. Saatuasi ratkaisun, piirrä ratkaisun kuvia alkuarvon muuttujana, ja tutki kuinka pienet muutokset aiheuttavat havaittavia eroja.

**34.** Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \rho y \\ \frac{dy}{dt} = \sigma x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -\beta z + xy \end{cases}$$

numeerisesti välillä $[0, 20]$, kun $\sigma = 10, \rho = 28$ ja $\beta = 8/3$. Piirrä ratkaisukäyrät samaan kuvaan, ja piirrä käyrät $x(t)$ ja $z(t)$ parametrisesti. Tämän jälkeen piirrä 3-ulotteinen parametrisoitu käyrä kaikista koordinaateista.

Onko ratkaisu rajoitettu? Suppeneeko se kohti jotain arvoa?

Kokeile muuttaa alkuarvoja, sekä parametrien arvoja. Vallitsevan teorian mukaan systeemi on *kaoottinen dynaaminen systeemi*, jonka käyttäytyminen voi muuttua merkitsevästi jo pienistä muutoksista lähtötilanteessa; itse asiassa termi perhosvaikutus keksittiin kuvaamaan juuri tämän systeemin käytöstä.

**Vihje:** Kolmiulotteinen parametrisoitu käyrä (tai pistejoukko) piirretään MATLABissa funktiolla `plot3`.

**35.** Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'(t) = -\frac{1}{t^2} + 10\left(y - \frac{1}{t}\right); y(1) = 1.$$

käyttäen Backward-Euler menetelmää:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1,y_{n+1}}).$$

Jotta tämä onnistuisi, tulee jokaisella iteraation askeleella ratkaista yhtälö

$$y_{n+1} - hf(t_{n+1,y_{n+1}}) = y_n$$

$y_{n+1}$:n suhteen. Tämä tarkoittaa, että yleisen ratkaisimen kirjoittaminen olisi vaikeaa, mutta tässä eksplisiittisessä tapauksessa se onnistuu.

Vertaa sitten saamaasi tulosta MATLABin `ode45` funktiolla saamaasi: kuinka selität eron?

**Vihje:**

## mlDiffint

**36.** Muista, että funktion $f$ derivaatta pisteessä $x_0$ määritellään seuraavasti:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Kuinka laskisit derivaatan numeerisesti? Kirjoita MATLAB funktio joka laskee annetun funktion derivaatan.

Kokeile laskea funktion $f(x) = \sin(x)$ ja vertaa saamaasi tulosta derivaatan tarkkaan arvoon $f'(x) = \cos(x)$. Tuottaako pienempi $h$:n arvo parempia tuloksia?

Keksitkö keinoa jolla laskea toinen derivaatta numeerisesti? Entä vektorifunktioiden derivointi?

**Vihje:** Muista, että alkioittaiset alkioittaiset operaatiot ilmoitetaan pisteellä.

**37. Ohjelmat**:

Maple,Mathematica , Matlab (erityisesti b)-kohta).

(Kurssi: 2012 kevät H/H2T15.tex)

Laske integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{13 - 12\cos 2x}\, dx$$

a) symbolisesti, b) numeerisesti. Piirrä integroitavan funktion kuvaaja. Mikä itse asiassa on integraalin arvo?

**Vihje:** Mathematica:
Symbolinen integrointi tapahtuu funktiolla `Integrate`, numeerinen funktiolla `NIntegrate`. Jälkimmäisessä sovelletaan suoraan jotakin numeerisen integroinnin menetelmää, jonka valintaan myös käyttäjä voi vaikuttaa. Ks. dokumentaatiota, erityisesti Implementation Notes.

Maple:
Symbolinen integrointi tapahtuu funktiolla `int`, numeerinen funktiolla `int(...,type=numeric)` tai `evalf(Int(...))`. Jälkimmäisessä sovelletaan suoraan jotakin numeerisen integroinnin menetelmää, jonka valintaan myös käyttäjä voi vaikuttaa.

Matlab:

Integrandi määritellään funktioksi (helpoimmin funktiokahvaksi). Sitten quad-alkuiset Matlab-funktiot.

**Luokittelu**:
`mplteht/mplDiffint/mplxx.tex`, `matlabteht/mlDiffint/mlDixx.tex`
`mmateht/mmaDiffint/mmaDi100`
**Avainsanat:**
Symbolinen integrointi, numeerinen integroinit, funktiot, lausekkeet

**38.** mmaDi104/mplDi11/mlDi11

Määritä funktion $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 1]$.

**Vihje:** arcsin on Mathematicassa `ArcSin`, Maplessa `arcsin` ja Matlabissa `asin`.
Käytä symboliohjelmissa perinteistä "diffistekniikkaa" kuvan kanssa, Matlab:ssa raakaa "numeronmurskausta" tyyliin: `linspace, plot, zoom`, uusi `linspace` kapeammalla välillä, `find`, ...

## mlFunktiot

**39.** Jos $f$ on analyyttinen, sille pätee Cauchyn integraalikaava, josta muuttujanvaihdolla saadaan

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0 - re^{it})}{z_0 + re^{it} - z_0}dt$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(z0 + re^{it})dt.$$

Gaussin keskiarvoperiaatteen nojalla analyyttisen funktion arvo pisteessä $z_0$ on laskettavissa ottamalla integraalikeskiarvo reunan ylitse. Intuitiivisesti keskiarvo on aina arvojen maksimin alapuolella.

Tätä ajatusta noudattaen päästään seuraavaan: olkoon $f : U \to \mathbb{C}$ ei-vakio analyyttinen funktio alueessa $U$. Tällöin $z \mapsto |f(z)|$ ei periaatteen mukaan saavuta suurinta arvoaan alueessa $U$. Tutkitaan asiaa kokeellisesti:

1. Piirrä funktion $f(z) = |e^z|$ kuvaaja alueessa $[-1, 1] \times [-i, i]$.
2. Piirrä funktion $f(z) = |\log(z)|$ kuvaaja alueessa $[1, 10] \times [i, 10i]$
3. Tutki vielä kuvauksen $z \mapsto |z^3|$ käyttäytymistä alueessaa $[-1, 1] \times [-i, i]$.

Kuinka maksimiperiaate ilmenee näiden funktioiden tapauksessa?

Maksimiperiaate pätee myös harmonisille funktioille: jos $f = u + iv$ on analyyttinen funktio, joka (vähintään lokaalisti) saadaan annetusta harmonisesta funktiosta $u$, niin funktion

$$F(z) = e^{f(z)}$$

avulla saadaan maksimiperiaate pätemään funktiolle $u$, sillä $|F(z)| = e^u$. Tutki maksimiperiaatten toteutumista eksponenttifunktion reaali- ja imaginääriosille seuraavasti:

```
t  = -1:0.1:1;
[x, y] = meshgrid(t,t);
u = exp(x).*cos(y);
mesh(x,y,u);
v = exp(x).*sin(y);
mesh(x,y,v)
```

**Vihje:**

**40.** On esitetty, että jatkuva funktio $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, joka toteuttaa ehdot

1. $f(2x) = 2f(x)$, and
2. $f(1) = c$

on aina muotoa $f(x) = cx$. Tälle on kuitenkin esitetty seuraava vastaesimerkki:

$$f(x) = 2^{-n}x^2 + 2^{n+1}, x \in [2^n, 2^{n+1}),$$

$n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. Kirjoita funktio $f$ MATLABissa ja piirrä sen kuvaaja.

**Vihje:** Tehtävän tarkoitus on opastaa MATLABin katto- ja lattiafunktioiden käytössä. Nämä ovat nimeltään `floor` ja `ceil` - katso tarkempia tietoja MATLABin helpistä.

## mlGrafiikka

**41.** Piirrä samaan kuvaan funktioiden cos ja sin kuvaajat välillä $[-2\pi, 2\pi]$ Aloita tyyliin:

```
x=linspace(-2*pi,2*pi); y1=cos(x); y2=sin(x);
plot(...)
```

**Vihje:** Voit piirtää molemmat yhdellä `plot`-komennolla tai käyrän kerrallaan pitämällä vanhan kuvan `hold`-komennon avulla.

Jos haluat kuvat eri grafiikkaikkunoihin, voit käyttää `figure`-komentoa. Toisinaan on kätevää jakaa grafiikkaruutu osiin. Tämä onnistuu `subplot`:n avulla. Kokeile näitä vaihtoehtoisia tapoja (nyt tai myöhemmin).

**42.** Piirrä

1. $xe^{-x^2}$ välillä $[-2, 2]$
2. $1/(1 + x^2)$ välillä $[-4, 4]$

**Vihje:** Muista pisteet laskutoimituksissa!

**43.** Piirrä $\sin(2x)$ sinisellä ja $cos(5x)$ punaisella, välillä $[-\pi, \pi]$ (samaan kuvaan). Merkitse vielä samaan kuvaan $\sin(2x)$:n arvot o-merkeillä x-pisteissä

$$-\pi, -\pi + h, \ldots - \pi + 2h, \ldots, \pi, \text{kun}\, h = \pi/8.$$

**Vihje:** Pane merkille tällaiset grafiikan ulkoasua säätelevät lisäkomennot (jotka voidaan antaa jälkikäteen (paitsi `hold on` pitää antaa ajoissa)):
`grid on/off, hold on/off, axis, xlim, ylim, figure, subplot, shg , close all` Tutki toiminta help:stä ja oppaista. Aloita: `help plot` (tai klikkaa: *plot*). Suorita joitakin kokeiluja (mutta älä uuvuksiin asti tässä vaiheessa vielä).

**44.** Piirrä samaan kuvaan funktioiden $\sin k\,x$ kuvaajat välillä $[0, 2\pi]$, kun $k = 1 \ldots 5$.

1. Tee nuolinäppäintä ( $\uparrow$ ) komentoeditoinnissa hyödyntäen ja `hold on`- komentoa käyttäen.
2. Kirjoita pieni `for`-silmukka.
3. Muodosta 5-sarakkeinen matriisi, jonka $k : s$ sarake on $\sin kx$, missä $x$ on “x-vektori” .

**Vihje:** Muodosta ensin $100 \times 5$-matriisi , jonka sarakkeet ovat $k\,x$, $k = 1 \ldots 5$. Kätevimmin matriisikertolaskulla `x*K`, missä $x$ on (100-pituinen) sarakevektori ja $K$ (5-pituinen) indeksi(rivi)vektori. Mieti huolellisesti, miksi!
Toinen mahdollisuus on käyttää `meshgrid`-komentoa, jonka käyttöön rutinoidutaan 3d-grafiikan yhteydessä.

**45.** Matriisiin sovellettuna `plot`-funktio piirtää kunkin matriisin sarakkeen. Varsin käyttökelpoinen muoto on `plot(x,A)`, jossa `x` on `A`:n sarakkeiden pituinen argumenttivektori.

Suorita seuraavat komennot:

```
>> x=linspace(-1,1);
>> V=vander(x);
>> plot(x,V); shg
```

Jatka tähän tapaan:

```
>> figure   % Avaa uusi grafiikkaikkuna.
>> V=fliplr(V);
>> W=V(:,1:10);
>> plot(x,W);shg
```

Selitä, mitä näissä tapahtuu.

**46.** Piirrä samaan kuvaan potenssit $x, x^2, \ldots, x^n$, missä $n$ on muuteltava parametri. Käytä m-tiedostoa (skriptiä) seuraavan ohjeen mukaisesti.
Avaa uusi m-tiedosto ( `FILE`-valikosta `open->new->script` ) ja talleta se vaikkapa nimelle potenssipiirto.m .
Tai kirjoita komentoikkunassa: `>> edit 'potenssipiirto.m'`
Aloita tiedosto jotenkin näin:

```
% % Piirret\"a\"an potenssifunktioita.
% Tiedosto: potenssipiirto.m.
% Laatinut Vilja Varis 1.1.2012  % HUOM! ellet muuta tätä, saat 0 pistettä!
close all % Grafiikkaruudun tyhjennys
n=5;      % Muuteltava parametri
...
```

Talleta ja kirjoita komentoikkunaan:

```
>> potenssipiirto
```

Tällöin tiedostossa olevat Matlab-komennot suorittuvat.

Komennot suorittuvat myös editori-ikkunasta `CTR-ENTER` :llä. (Mac:ssä yleisesti `CTR`:n sijasta `cmd`.)

(Vihreä nuoli tai `F5` toimivat myös.)
Suorita skripti muutamalla eri n:n arvolla

**Vihje:**

1. Tee `for`-silmukka ja käytä `hold on`-komentoa uuden kuvan piirtämiseksi vanhan kaveriksi.
2. Olkoon aluksi vaikka $n = 3, m = 7$, missä $m$ on $x$-vektorin pituus. Muodosta matriisit `N` ja `X`, missä `N` koostuu vakiosarakkeista $1, 2, 3$ ja `X` saadaan latomalla kolme $x$-saraketta rinnakkain. Tällöin `X.^N` on matriisi, jonka sarakkeina ovat `x`-vektorin potenssit $1, 2, 3$. Kuva saadaan nyt komennolla `plot(x,X.^N)`. (Yleisesti: `plot(x,Y)` piirtää kunkin Y-matriisin sarakkeen x:n toimiessa x-akselina, kun `x` on `Y`:n sarakkeiden pituinen vektori. (Toimii myös riveittäin, jos x on rivien pituinen.)

   Miten saadaan helpoimmin matriisit `X, N` ? Standarditapa on tämä:

   ```
   >> nind=1:3;
   >> [N,X]=meshgrid(nind,x);
   ```

   Suorita ja selvitä itsellesi.

   Tee sitten esim. 100-pituinen x-vektori ja vaihtele myös n:ää ja piirrä sileitä kuvia.
   Lopuksi voit kokeilla, miltä näyttää `mesh(nind,x,X.^N)` .

   Huom! Tällainen `meshgrid`-komennon käyttö on rutiinitoimenpide 3d-grafiikan tekemisessä, sen toimintaperiaate on mukava ymmärtää, sitä tämä yrittää palvella.
3. Helpoin tapa lienee Vandermonden matriisi `vander`. Siitäpä on eri tehtävä (05), mutta ei ole huonoa harjoitella tässäkin uudestaan.

**47.** [**3D-grafiikkaa, korkeuskäyriä**] **HA**

Olkoon

$$f(x,y) = \sin(3\,y - x^2 + 1) + cos(2\,y^2 - 2\,x).$$

Piirrä pintakuva ja korkeuskäyräpiirros, jälkimmäinen sekä `contour` että `ezcontour`-funktioilla. Tässä on mahdollisuus kokeilla korkeuskäyrien valitsemistapoja, myös `clabel`. Ota alueeksi vaikka `[-2 2 -1 1]` .

**Vihje:** Opiskele:

`http://math.tkk.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/grafiikka.html#sec:3d`

Matlab-help: `doc mesh, doc surf, doc contour`

---

**Ratkaisu:** `./mlG07ratk.m`

`./html/mlG07ratk.html`

`http://math.tkk.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/ratkaisuja/html/H3teht4.html`

**48.** Olkoon

$$f(x) = \left( \frac{1 + \frac{x}{24}}{1 - \frac{x}{12} + \frac{x^2}{384}} \right)^8$$

Tämä on exp-funktion rationaaliapproksimaatio, ns. Pade-approksimaatio. Piirrä kuvaaja välillä [0,4].
Piirrä samaan kuvaan exp-funktio eri värillä ja eri kuvaan erotus $f(x) - exp(x)$
Aloita vaikka: `x=linspace(0,4,200);`

**Vihje:** Tehtävässä harjoitellaan lausekkeen muodostamista pisteittäisin laskutoimituksin. Homma selkeytyy jakamalla pienempiin osiin, ainakin nyt tällaisiin:

```
>> x=...;
>> osoittaja=...;
>> nimittaja=...;
>> f=...;  % Huomaa: f on muuttuja (200-pituinen vektori), ei funktio.
>>         % Tässä ei siten saa kirjoittaa: f(x) = ...
```

---

**Ratkaisu:**

```
>> x=linspace(0,4,200);
>> osoittaja=1+x/24;    % Skalaarilla jaossa ei tarvia pistettä.
>>        % (Jos skalaari jaettaisiin vektorilla, niin toki tarvittaisiin.)
>> nimittaja=1-x/12+x.^2/384;
>> f=(osoittaja./nimittaja).^8;
>> plot(x,f)
>> hold on
>> plot(x,exp(x),'r')
>> figure   % uusi graiikkaikkuna
>> plot(x,f-exp(x))
```

**Opettajalle:** Tästä voisi tehdä jatkotehtävän tyyppiä: Vertaa Taylorin sarjaa ja Pade-approksimaatiota. Ja vielä: voisi vaikka opettaa, miten Pade-approksimaatioita muodostetaan.

**49.** Olkoot $c$ ja $z_0$ kompleksilukuja. Tällöin rekursion

$$z_n = z_{n-1}^2 + c$$

määräämä dynaaminen systeemi tunnetaan kvadraattisena kuvauksena. Valituille luvuille $c$ ja $z_0$ ylläoleva rekursio johtaa kompleksiseen lukujonoon $z_1, z_2, z_3 \ldots$. Tätä jonoa kutsutaan $z_0$:n kiertoradaksi. Riippuen lukujen $c$ ja $z_0$ valinnasta ratojen muotoja on useita.

Annetulle kiinteälle luvulle $c$ useimmilla $z_0$ rata lähestyy ääretöntä (eli $|z_n|$ kasvaa rajatta kun $n \to \infty$.) Joillakin $c$ ja $z_0$ rata kuitenkin suppenee kohti jotain periodista silmukkaa (eli arvot kiertävät $z_0$ jollain tietyllä etäisyydellä $|z_n|$); joillakin alkuarvoilla rata on kaoottinen. Nämä alkuarvot $z_0$ ovat kuvauksen Julia-joukko.

Tässä harjoituksessa kirjoitetaan MATLAB-ohjelma, joka laskee ns. täytetyn Julia-joukon, joka koostuu niistä alkioista $z_0$ joiden radat jollain annetulla arvolla $c$ eivät kasva rajatta – tavallinen Julia-joukko on tämän joukon reuna.

On näytetty, että jos $|z_n|$ kasvaa isommaksi kuin 2 jollain arvolla $n$, rekursio kasvaa rajatta. Arvoa $n$ jolla tämä tapahtuu, kutsutaan tässä tehtävässä pisteen $z_0$ ”pakonopeudeksi.”

Aloita kirjoittamalla funktio `n = escapeVelocity(z0,c,N)`, jossa $N$ on jokin yläraja pakonopeuksille (erityisesti: jos $|z_n| < 2 \; \forall \; n < N$, funktion tulee palauttaa $N$. Näin vältetään ikuiset silmukat).

Luodaksesi Julia-joukon kirjoita funktio `M=julia(zMax,c,N)`. Argumentti `zMax` määrää kompleksitasosta nelikulmion $|Im(z)| < z_{max}, |Re(z)| < z_{maz}$. $c$ ja $N$ ovat samat argumentit kuin edellä, palautettava matriisi $\mathbf{M}$ koostuu määritetyn hilan pakonopeuksista.

Aloita funktion `julia` kirjoittaminen määrittelemällä $500 \times 500$ hila realitasossa, luo sen avulla vastaava hila $\mathbf{Z}$ kompleksitasolle, ja aja funktio `escapeVelocity` jokaiselle matriisin $\mathbf{Z}$ alkiolle.

**Vihje:** Realiakselin väli $[a, b]$ määritellään MATLABissa komennolla `I = linspace(a,b,n)`, missä n on haluttujen pisteiden määrä, kuten esim. 500. Hila reaalitasolle määritellään komennolla `[x y] = meshgrid(t1,t2)` , missä t1 ja t2 ovat välejä reaaliakselilta. Tästä luodaan kompleksitasoa peittävä hila komennolla `z = x+i*y`.

Kompleksiluvun modulin saa selville itseisarvofunktiolla `abs`.

**50.** Kirjoita MATLAB-skripti, joka laskee ja piirtää seuraavat funktiot:

a) $y = 5\cos(3\pi x)$. Laske arvo 101:ssä tasavälisessä pisteessä välillä $0 \leq x \leq 1$.

b) $y = \frac{1}{1+x^2}$ välillä $-5 \leq x \leq 5$ .

c) $y = \frac{\sin(7x)-\sin(5x)}{\cos(7x)+\cos(5x)}$. Laske arvo 200 tasavälisessä pisteessä välillä $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Käytä `axis` komentoa asettaaksesi näytettävät akselit väleille $-2 \leq x \leq 2$ ja $-10 \leq x \leq 10$.

**Vihje:** Jako- ja kertolaskujen tapauksessa ole tarkkana: haluatko matriisioperaation vai alkioittaisen operaation? Alkioittaiset operaatiot erotetaan matriisioperaatioista operaattorin eteen sijoitettavalla pisteellä. Esimerkiksi `.*` on alkioittainen kertolasku, `*` matriisien kertolasku.

Trigonometriset funktiot toimivat MATLABissa alkioittain, ja löytyvät loogisilla nimillä. (`cos, acos, sin` jne.)

Tasavälisiä pistejoukkoja luodaan komennolla `linspace`, tai vaihtoehtoisesti MATLABin kaksoispiste-notaatiolla. Tutustu kummankin dokumentaatioon, ja päätä kumpaa kannattaa tässä tilanteessa käyttää.

**51.** Funktion $g(x)$ kiintopiste on piste $x_0$, jolle pätee $g(x_0) = x_0$. Valistuneen arvauksen kiintopisteen sijainnista voi piirtämällä kuvaajat $y = g(x)$ ja $y = x$ samaan kuvaan, ja arvioimalla käyrien leikkauspistettä graafisesti. Käyttämällä tätä tekniikkaa, arvioi funktion $g(x) = \cos(x)$ kiintopisteen sijaintia.

**Vihje:** Kaksi käyrää voidaan piirtää samaan kuvaan joko yhdellä `plot` käskyllä : `plot(x1,y1,x2,y2)`, tai vaihtoehtoisesti voidaan käyttää MATLABin `hold` optiota:

```
plot(x1,y1);
hold on
plot(x2,y2);
hold off
```

**52.** Piirrä MATLABilla alla oleva kuva.

**Vihje:** Selityslaatikko luodaan komennolla `legend`, akselikuvaukset komennoilla `xlabel` ja `ylabel`.

**53.** Tässä tehtävässä tutkitaan kuvien, matriisien ja singulaariarvojen yhteyksiä.

Matriisin $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ singulaariarvohajotelma on

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T,$$

missä matriisi $\mathbf{S}$ on diagonaalimatriisi, ja matriisit $\mathbf{U}$ ja $\mathbf{V}$ ovat ortogonaalisia neliömatriiseja. Matriisin sisältämää informaatiota voidaan tietyssä mielessä kompressoida tiputtamalla osia singulaariarvohajotelmasta pois; on todistettavissa että (MATLABilla ilmaistuna) `U(:,1:k)*S(1:k,1:k)*V(:,1:k)'` on paras mahdollinen rank($k$)-approksimaatio matriisille $\mathbf{A}$.

Kuva voidaan ajatella $m \times n$ matriisina, missä $i, j$ alkio ilmaisee vastaavassa paikassa olevan pikselin väriarvon. Tutkitaan sitten kuinka singulaariarvoja voidaan käyttää hyväksi kuvien pakkaamisessa ja hahmontunnistuksessa.

Lue haluamasi kuva sisään MATLABin `imread` komennolla. Komento luo (yleensä, mutta hieman kuvasta riippuen), $m \times n \times 3$ matriisin. Tämä vastaa RGB-esitystä: ensimmäisessä kerroksessa on punaisen värin intensiteetit, toisessa vihreän ja kolmannessa sinisen. Muuta tämä matriisi harmaaskaalaan komennolla `rgb2gray`. Tämän jälkeen tee matriisille singulaariarvohajotelma komennolla `[u s v] = svd(P)`, missä `P` on kuvasi matriisiesitys. Tutki sitten millä $k$:n arvolla komentojono

```
>> M = u(:,1:k)*s(1:k,1:k)*v(:,1:k)';
>> image(M)
```

tuottaa havaittavia tuloksia. Pitäisi myös päteä, että kuvan isommat hahmot alkavat erottua ensin, mikä tekee singulaariarvoista huomattavan tehokkaan työkalun hahmontunnistuksessa.

**Vihje:** Kuvan ulottuvuuksien ei kannata olla kovin isoja: singulaariarvohajotelma on raskas laskettava. Jos haluat lisähaastetta, erottele kuvan värikerrokset, tee hajotelma niille erikseen, ja kokoa tulokset. Näin saat aikaan värikuvia.

**54.** Luo $n \times n$ matriiseja $\mathbf{A}$ jollakin sopivalla $n$ (s.o. enemmän kuin kymmenen, vähemmän kuin sata), joiden alkiot ovat muotoa

$$\mathbf{A}_{i,j} = \frac{1}{i - j + t}.$$

Piirrä matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot tasoon, kun $t$ vaihtelee välillä $[-1, 1]$. Mitä havaitset? Voisivatko perättäisten ominaisarvojen *radat* esittää jotain?

**Vihje:** Mieti miten matriisin voisi määritellä ilman silmukkaa. Matriisin ominaisarvot lasketaan komennolla `eig` – huomaa, että jos matriisi on kovin iso, niin laskeminen voi kestää kauan.

**55.** **HT**

a) Piirrä funktiot cos $t$ ja sin $t$ samaan kuvaan eri väreillä.

b) Piirrä toiseen kuvaan yksikköympyrä ja säännöllinen $n-$kulmio esim. arvolla $n = 10$. Järjestä sopivilla `axis`-komennoilla skaalat yhtäsuuriksi, jotta ympyrä näkyy ympyränä.

c) Piirrä yksikköympyrän kuva joillain edellä esiintyneillä lineaarikuvauksilla(tai muilla keksimilläsi).

**Vihje:** Uusi grafiikkaikkuna: `figure`
Muistathan ympyrän luonnollisen parametriesityksen.
Ympyrän data koostuu oikeasti säännöllisesen n-kulmion nurkkapisteistä, missä esim. $n = 100$ (`linspace`:n oletus). Ympyrän kuvan piirtäminen on siten sama homma kuin edellisissä lineaarikuvaustehtävissä.

**56.** Matlab ja Maple (tee molemmilla).

$$f(x, y) = \sin(3\,y - x^2 + 1) + cos(2\,y^2 - 2\,x).$$

Piirrä pintakuva ja korkeuskäyräpiirros.

Ota alueeksi vaikka `[-2 2 -1 1]` .

**Vihje:** Tutustu samalla `Matlabin meshgrid`:n toimintaan.
Korkeusarvomatriisi Z tehdään kahden muuttujan funktiolle tähän tapaan:

```
>> x=linspace(a,b,m); y=linspace(c,d,n); % m ja n luokkaa 30.
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> Z=f(X,Y);
```

(Kokeile periaatetta pienillä, hiukan erikokoisilla matriiseilla X,Y.)
Tässä funktion f on toimittava pisteittäisin operaatioin. Jos vaikka $f(x, y) = x^2 - y^2$, kirjoitettaisiin:
`Z=X.^2 - Y.^2;`

Pintoihin `mesh(x,y,Z), surf(x,y,Z), ...` Kokeile myös `colorbar` yms.

Matlabilla korkeuskäyriin `contour` , voit myös kokeilla `ezcontour`-funktiota. Mahdollisuus on kokeilla myös korkeuskäyrien valitsemistapoja, `clabel`.

**Älä diskretoi liian hienoksi.** Linspacessa 100 on ihan liikaa, n. luokkaa 30 olkoon lähtökohta.

**Maple:** Helpompaa, mutta tulos ei aivan niin loistava kuin Matlabissa. (Osin tosin varsin hienoa tämäkin, ja “context sensitive”).

```
> with(plots):
> plot3d(f(x,y),x=a..b,y=c..d);
> contour(f(x,y),x=a..b,y=c..d); # Tarkista!
```

## mlIntegraalimuunnos

**57.** Tutkitaan kohinaisen signaalin suodattamista MATLABissa. Tutkitaan signaalia

$$f(t) = 0.3\sin(3t) + \sin(t),$$

johon lisätään synteettistä virhettä:

```
t = -pi:.05:pi;
f = 0.3*sin(3*t) + sin(t);
fh = f + rand(size(f))-.5;
```

Suodata kohinaisesta signaalista `fh` alkuperäinen esille alkuperäinen signaali mahdollisimman tarkasti käyttämällä diskreettiä Fourier-muunnosta

**Vihje:** Signaalin taajuuskomponenti värähtelevät taajuuksilla 3 ja 1 $2\pi$:n aikavälillä, ja taajudella 1 värähtelevä komponentti dominoi, sillä sen amplitudi on suurempi. Tehtävässä kannattaa siirtyä aika-tasosta taajuustasoon, eli käytännössätehdä signaalille Fourier-muunnos (`fft`), ja piirtää taajuskomponenttien magnitudit (`abs`) näkyville, ja päätellä, mitkä kuuluvat signaaliin, ja mitkä eivät. Tämän jälkeen käytä loogista indeksointia ja käänteistä Fourier-muunnosta (`ifft`) saadaksesi esille suodatettu signaali.

## mlKompleksianalyysi

**58.** mlK001.tex
Ensiapuohjeita

- Sijoitus muuttujaan esim: `>> z=(1+i)/(1-2*i)`
  Puolipiste lopussa estää tulostuksen.
- Muuttujan sisällön näet kirjoittamalla sen nimen ilman puolipistettä
- Lopeta puolipisteeseen, jos komentosi tuottaa dataa paljon, isojen tulosteiden vilistäminen ruudulla on pelkkää kärsimystä.
- Jos kuitenkin unohdit, niin `CTR-C`
- Vektorin voi muodostaa esim. näin: `>> vektori=[-1,0,4,5.2-3.45*i]`
  Pitempiin vektoreihin: `help colon, help linspace`
- Kun teet aritmetiikkaa vektoreille tyyliin
  `>> x=linspace(0,1); y=(x.^2).*sin(x);`
  niin **muista piste** ja ymmärrä. (Tässä sulut vain selvennykseksi.)
- Kaikki vähänkin vakavampi työskentely kannattaa tehdä avaamalla editorilla tekstitiedosto, jonne kerätään Matlab-ajon komennot (ja mahdollisesti tärkeimmät tulosteet).
- Matriisi muodostetaan tyyliin `>> A=[1 2 3;4 5 6]`
  2. rivi: `A(2,:)`, 3. sarake: `A(:,3)` . Kokeile ihmeessä!

Tämä ei siis ole tehtävä, alla vain tämän ohjeen Latex-koodi.

**59.** mlK002.tex

Sijoita muuttujalle $z$ arvo $2 + 3i$. Laske Matlabilla $z$:n reaaliosa, imaginaariosa,liittoluku, moduli (itseisarvo) ja argumentti (napakulma). Piirrä pisteet $z$ ja $\overline{z}$. Anna sopiva axis-komento, jotta saat paremman koordinaatiston. Piirrä sitten samaan kuvaan jana origosta pisteeseen z punaisella värillä ja origosta pisteeseen $\overline{z}$ sinisellä.

Sopivia Matlab-komentoja: `real, imag, conj, abs, angle, sign, plot, axis, hold on` Tutki kutakin helpillä tyyliin `help real` jne.

Opiskele aihetta "kompleksilukujen piirtäminen":

`math.aalto.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/grafiikka.html#complexplot`

Tässä lyhyesti:
- `plot(z)` piirtää pisteen $z$ tasoon, jos $z$ on kompleksiluku.
- Yleisemmin, jos $z$ on kompleksivektori, `plot(z)` piirtää $z$-vektorin pisteiden kautta murtoviivan.
- Jos halutaan pelkät pisteet, niin `plot(z,'o')` (tai esim `plot(z,'xb')` jos sinisellä ristillä).

**60.** mlK003.tex
Olkoon $z$:lla edellisen tehtävän arvo. Suorita komennot ja selvitä aina itsellesi, mitä kukin tekee.

```
>> z=sign(z)
>> w=[z,z^2,z^3,z^4,z^5,z^6,z^7,x^8]
>> plot(w)
>> axis equal
```

Piirrä samaan kuvaan säteet origosta kuhunkin $w$-vektorin pisteeseen vaikka punaisella.
Vihje: Muista `hold on` ja sitten vaan annat plot:lle argumentiksi 2:n pituisia vektoreita ja käytät komentoeditoria (napsuttelet nuolinäppäintä ja editoit).

Mitä havaitset, jos ajattelet kompleksiluvun potensseja (vaikkapa De Moivreta)?

Matlab-tekniikkaa:
- Miksi ei tarvitse kirjoittaa `z.^2` ?
- Entä jos haluaisit piirtää potenssit `1:100` ? Miksi nyt täytyy kirjoittaa `.^` ?

Suorita Matlab:ssa: `help arith`
Lue: `.../opas/ei-niin-lyhyt/osa2.html#luku4` matriisi- ja taulukko-operaatioesimerkit ja
`...opas/lyhyt/perusteet.html#sec:matriisilaskenta`

**61.** mlK004.tex
Muodosta vektori, jossa on luvut $w_{n,k} = \sqrt[n]{1}, k = 0 \ldots n-1$. n:n arvolla 10.

a) Käytä juurikaavoja.
b) Ratkaise (numeerisesti) polynomiyhtälö $z^n = 1$ ( `help roots`)

Piirrä yksikköympyrä ja samaan kuvaan kaikki ykkösen n:nnet juuret vaikka `'o'`-merkillä), missä vaikkapa $n = 10$. Kokeile eri n:n arvoilla.

Kirjoita Matlabin editorilla tiedosto `h1teht3.m` (tms.) ja tee siitä Matlab skripti tyyliin:

```
% Harjoitus 1 tehtävä 3 , tiedosto h1teht3.m
% Nimi ja opno (harjoitukseksi myöhempiin tarpeisiin)
%
n=10    % Tätä voit vaihdella.
k=0:n-1 % kokonaislukuvektori.
w=...   % w-vekori, jossa nuo n:nnet juuret.
```

Skripti, jossa on Matlab-komentoja (ja selityksiä `%`-merkin takana), suoritetaan Matlabissa komentamalla `h1teht3` tai leikkaus/liimaus- menetelmällä. Suosittelemme jälkimmästä myös siksi, että lienee yksinkertaisinta sijoittaa tärkeimmät komentojen tulokset samaan tiedostoon, jolloin sitä ei enää voi suorittaa skriptinä (ellei halua nähdä virheilmoitussumaa).

**62.** mlK005.tex
Puhdas kynä/paperi-tehtävä. Hahmottele seuraavat alueet kompleksitasossa (z-tasossa) ja niiden kuva- alueet kuvauksessa $w = e^z$. Kiinnitä myös huomiota siihen, kuuluuko reuna mukaan. Tässä $z = x + iy$
(a) $-1 < x < 1, -\pi < y < \pi$.
(b) $0 \leq y \leq \pi/2$. (Mieti, kuuluuko 0 mukaan kuvaan.)
(c) $\pi < y \leq 3\pi$.
(d) $\ln 3 < x < \ln 5$.

**63.** mlK006.tex
Avaa
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/03/L/CA1.html`
ja sieltä kohta demoexp. Voit käytellä skriptiä leikkaamalla/liimaamalla omaan Matlab-työtiedostoosi ja sieltä komentoikkunaan. Tässä vaiheessa ei ole välttämätöntä ymmärtää kaikkia skriptin Matlab-komentoja, kunhan näet, miten sitä modifiomalla voit tehdä haluamiasi juttuja.

(a) Suorita ensin komennot ja katso, että saat samanlaiset kuvat kuin CA1.html:ssä.
(b) Havainnollista exp-funktiota katsomalla joidenkin suorakulmioalueiden kuvautumista.
(c) Voit myös helposti muuttaa skriptiä yleisluontoisemmaksi ottamalla x-vektorin pituuden n käyttöön ja kirjoittamalla vastaavanlaisen for-silmukan kuin y-vektorille on tehty.

**64.** mlK007.tex
(Puhdas käsinlasku)
Kompleksiluvulla $e^{i\alpha}$ kertominen suorittaa kierron kulman $\alpha$ verran. Kyseessä on tason $\mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus, jolla niin ollen on matriisiesitys. (Muistele 1-kurssien asioita, lineaarikuvauksia käsitellään tälläkin kurssilla lähemmin.)

Johda kiertokuvauksen matriisiesitys muodostamalla tulo $w = e^{i\alpha}z$, $z = x + iy = re^{i\Theta}$

Ohje: Ei tarvitse muuta kuin kirjoittaa $e^{i\alpha}(x + iy)$ muotoon $Re + iIm$ ja samaistaa kompleksiluku $x + iy$ pystyvektorin $[x, y]^T$ kanssa.

Opetus: Kiertokuvauksia (ja eräitä muitakin tason lineaarikuvauksia) voidaan käsitellä erityisen kätevästi kompleksiaritmetiikan avulla. Matriisilaskujen sijasta voidaan harrastaa kompleksiaritmetiikkaa.

Seuraavassa tehtävässä harrastetaan tätä oikein olan takaa.

Olennaista on, että käytössä on ohjelma, joka osaa laskea kompleksisilla vektoreilla. Matlab on tällainen (myös Maple ja Mathematica).

**65.** mlK008.tex

Alla on versio kuuluisan matemaatikon *Arnoldin* ns. kissaa, jonka toteutamme Matlabilla varsin yksinkertaisena tyylitelmänä. Harjoituksen ajatuksena on demonstroida kompleksiaritmetiikan mahdollisuuksia kiertokuvauksien käsittelyssä. Samalla saamme rutiinia niin Matlabissa kuin yleensäkin kompleksiluvuilla laskemisessa.

Käsittelemme tässä kissaa tavallisuudesta poiketen kompleksilukuvektorina.

Tehtävässä ei ole jätetty juurikaan itse keksittävää. Niinpä jos aika on tiukalla, tämä tehtävä sopii oikein hyvin omatoimisesti läpikäytäväksi vaikka kotona.

Selvitä itsellesi juurta jaksain, mitä kussakin vaiheessa tehdään. Kissa ja sen pyöritys on pelkkää kompleksiaritmetiikkaa.

Komennot on annettu "ideointiyyliin", siksi koodia on niin paljon.

Suorita ensin nämä komennot: (Huomaa puolipisteen käyttö, jos dataa on "vähänkin paljon".)

```
clf              % clear graphics
t=0:pi/100:2*pi; % tai esim. t=linspace(0,2*pi);
paa=.1*exp(i*t);
plot(paa)
axis equal
hold on
silmat=[-0.05+i*.055, 0.05+i*.055]
plot(silmat,'+')
nena=.02*i+.003*exp(i*t);% t-vektori muodostettiin yllä.
plot(nena,'r')
%nena=.02*i
%plot(nena,'o')  % Tämä olisi ``laiskan miehen nenä''
% Suuksi sopiva ympyrän kaari välillä (-2*pi/3,-pi/3)
phi=linspace(-2*pi/3,-pi/3);
suu=0.05*exp(i*phi);
plot(suu,'.')
korvat=[.1*exp(i*pi/6),.1*exp(i*5*pi/6)]
plot(korvat,'o') % ``Laiskan miehen korvat''
```

Tässä on peruskissa.

Nyt ryhdymme pyörittelemään kissaparkaa. Päätä ei tarvitse pyörittää, ympyrä ei pyöritettäessä miksikään muutu. Riittää, kun pyöritämme suuta, nenää, silmiä ja korvia.

Kootaan ensin kissan osat yhteen vektoriin ja tehdään äskeinen uudestaan kissavektorilla.

```
figure(1)   % Tätä tarvitaan vain palattaessa takaisin kuvasta 2.
% Ajatellaan, että figure(1) on z-taso ja figure(2) w-taso.
clf              % Grafiikan putsaus
t=0:pi/100:2*pi; % Syytä tehdä uudestaan, vanha t voisi olla jo ihan muuta
paa=.1*exp(i*t);    % vaikkei näillä komennoilla satukaan.
plot(paa)
axis equal
hold on
zkissa=[silmat,nena,korvat,suu];
```

**66.** mlK009.tex

Matlab on ennenkaikkea matriisikieli. Jos kompleksiaritmetiikka sujuu kätevästi, niin samoin on laita matriisilaskujen. Katsotaan siksi vielä, miten edellinen hoidettaisin matriisioperaatioin. (Vrt. teht. 4) Näin saadaan malli myös yleisemmille linaarikuvauksille.

Tällä kerralla esitämme kissan tavanomaisemmassa muodossa kaksirivisenä reaalisena matriisina, jossa kukin sarake edustaa kissan pistettä $\mathbb{R}^2$:ssa.

Olkoon `zkissa` kuten edellä.

```
alpha=pi/4;   % muuttele tarpeen mukaan.
A=[cos(alpha), -sin(alpha);sin(alpha),cos(alpha)] % Kiertomatriisi.
zkissa=[real(zkissa);imag(zkissa)]; % zkissasamaistus C <-> R^2
wkissa=A*zkissa; % Mahtavan kätevää on tämäkin. Kun zkissapisteet ovat
            % matriisin sarakkeina, niin kertomalla kiertomatriisilla A,
            % saadaan wkissapisteiden muodostama matriisi.
figure(1); clf
plot(zkissa(1,:),zkissa(2,:),'o') % Tämä on kaikkein tavallisin plot-
                                  % komennon muoto, kun data on reaalista.
axis equal
figure(2); clf
plot(wkissa(1,:),wkissa(2,:),'*r')
```

```
>> z=2+3*i
z =

   2.0000 + 3.0000i

>> plot(z)
>> plot(z,'*')
>> axis([0 4 0 4])
>> hold on
>> plot([0 z])
>> abs(z)

ans =
    3.6056
>> angle(z)
ans =
    0.9828
>> atan(3/2)
ans =
    0.9828
```

## mlLinis – Matlab-tehtäviä lineaarialgebrasta

**67.** mlLi001.tex

**Ohjetiedosto**, poimi mukaan tehtäväpaperiin tarpeen mukaan.

**Matlab-ohjeita**

- Komennon suorittama tulos tulee ruudulle ENTER-painalluksen jälkeen (kuvat erilliseen ikkunaan). Jos haluat estää tulostuksen, päätä komento puolipisteeseen. Jos myöhemmin haluat katsoa muuttujan sisällön, kirjoita sen nimi (ilman puolipistettä). Jos muuttuja on suuri matriisi, kannattaa ensin katsoa sen koko `size(A)` tai sen jotain osaa, esim. `A(1:10,1:10)`

- Edellisen komennon tulos on muuttujassa `ans`. Yleensä on suositeltavaa antaa tulokselle oma nimi tyyliin `nimi= ...`

- `format long` : Tulostetaan enemmän numeroita (n. 16). Laskutarkkuuteen tämä ei vaikuta.
  `format rational` laskee rationaaliluvuilla.
  `format short`: Paluu oletustulostukseen.

- Matriisin `A` transpoosi: `A’`

- Kokonaislukuvektori: Esim `1:10` tai `1:2:20`. Myös `linspace`. Pystyvektoriksi transponoimalla.

- A(i,j) A:n alkio (i,j).
  A(2,:) A:n 2. rivi
  A(:,3) A:n 3. sarake
  A(1:4,1:4) osamatriisi
  Matriisin osaa voi päivittää, vaikkapa:
  `A(1:4,1:4)=ones(4,4)` tai
  `A(2,:)=A(2,:)-2*A(:,1)` (Gaussin rivioperaatio).

- Matriisien liittäminen: Jos $A$:lla ja $B$:llä on yhtä monta riviä, ne voidaan liittää peräkkäin: `[A b]` (tai `[A, b]`)
  Jos yhtä monta saraketta, niin allekkain: `[A;B]`

- Laskutoimitukset tarkoittavat matriisilaskua. Siis esim.
  `A*B, A^p`

- Vektorien ja matriisien (samankokoisten) pisteittäinen eli alkioittainen laskenta tapahtuu lisäämällä eteen piste. Esim:

  `u=[1 2 3], v=[-2 -2 -2], u.*v.`
  Toinen operandi voi olla skalaari.

  Siten esim. vektorin $u$ kaikki komponentit voidaan korottaa toiseen komennolla
  `u.^2`

**Avainsanat:**
Ohjetiedosto, Harjoitusohjeita, Lineaarialgebra, Matlabperusteet,

**68.** mlLi002.tex
Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -13 & -13 & -2 & 7 \\ 18 & -4 & 30 & -1 & -12 \\ -23 & 3 & 7 & 15 & 7 \\ 9 & 36 & -1 & 14 & 16 \\ 3 & 28 & 7 & 14 & 5 \end{bmatrix}$$

ja

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -196 \\ 435 \\ 11 \\ 111 \\ 195 \end{bmatrix}.$$

Ratkaise yhtälösysteemi $Ax = b$ ja tarkista tulos matriisikertolaskulla.

**Avainsanat:**
Lineaarinen yhtälöryhmä, Matlabperusteet, Matlabalkeet,perusmatriisilaskenta

**69.** mlLi003.tex [myös Maple, Mathematica]

a) Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä ja tarkista tulos kertolaskulla.

$$\begin{cases} 4x - 5y = 11 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

**Vihje:** Matlab: "Matriisijako": $A\backslash b$

b) Tiedetään, että Celsius-asteiden ja Fahrenheit-asteiden välillä on lineaarinen yhteys:

$$C = aF + b.$$

Lisäksi tiedetään, että vesi jäätyy 32 F:ssa ja -40 on sama kummassakin asteikossa. Johda kaava. Tarkoitus on kirjoittaa kertoimien a ja b määräämiseksi lineaarinen yhtälösysteemi, joka ratkaistaan Matlab:n takakenolla (\).

c) Muodosta matriisi, jonka 1. sarake on C-asteet $-50$:sta 5:n asteen välein 100 :aan ja toinen sisältää vastaavat F-asteet.

**Vihje:** Tarkan rationaalilukukaavan saat komentamalla `format rat`. Tee m-tiedosto kommentteineen.
Huomaa, että taulukkoa ei ole mukavaa katsoa koknaisuutena, esim. 10 ekaa riviä näet näin: `taulukko(1:10,:)` (eikö vain?).
Hivelevää on myös mennä “Workspace-ikkunaan” ja kaksoisklikata taulukko-ikonia.

Kokeile sen ajamista myös pdf:ksi `publish(Fahrenheit,pdf)`-komennolla (jos skripti on `Fahrenheit.m`), kunhan ensin testailet sen kuntoon.

**70.** mlLi004.tex Matlab/Maple/Mathematica

Tarkastellaan yhtälösysteemejä:

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 32 \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 23 \\ 7x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 33 \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 31 \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -5 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

a) Ratkaise molemmat systeemit.

b) Muuttamalla vähän yhtälön dataa (oikeaa puolta ja/tai kerroinmatriisia), voidaan tutkia systeemin herkkyyttä pienille virheille (datassa ja pyöristyksessä).

   Ratkaise 1. systeemi oikean puolen vektoreilla
   `[32.1, 22.9, 32.9,31.1]'` ja `[32.01, 22.99,32.99,31.01]'`
   ja 2. systeemi vektoreilla
   `[9.1 -5.1, 7.9, 3.1]'` ja `[9.01, -5.01, 7.99, 3.01]'` .

   Mitä nämä pienet häiriöt vaikuttavat ratkaisuihin?

c) Muuta kerroinmatriiseja lisäämällä matriisien kuhunkin alkioon pieni satunnaisluku
   `0.1*rand` . Ratkaise systeemit alkuperäisillä oikeilla puolilla. Mitä nämä muutokset vaikuttavat ratkaisuihin.

d) Lineaarisen yhtälösysteemin herkkyyttä pienille virheille sanotaan *häiriöalttiudeksi* (*"ill-conditioned* "). Laske kummankin matriirin häiriöalttius.

   Suhteellisen virheen suurtenemisypäyhtälö:

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \kappa \frac{||\Delta b||}{||b||}$$

   Pahimmillaan ratkaisun suhteellinen virhe voi olla luokkaa $\kappa\times$ (datan suhteellinen virhe) ($\kappa = cond(A)$)

**Luokittelu**:
`mplteht/mplLinis/mplLixx.tex`, `matlabteht/mlLinis/mlLixx.tex`
**Avainsanat:**
Numeerinen lineaarialgebra, matriisit, lineaariset yhtälöryhmät, häiriöalttius

**71.** mlLi005.tex
Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

Varmista ensin, että matriisi $\mathbf{A}$ on kääntyvä laskemalla $\det(A)$.
Tutki, mitä muita keinoja on matriisin ei-singulaarisuuden tarkistamiseen. Kokeile vaikka **rank**, **rref**, **lu**, **cond**, **rcond** (katso helpillä).
(Huomaa, että "oikeissa tehtävissä" tärkeämpi käsite on "lähes singulaarisuus", tähän det ei ole yleispätevä työkalu.)

Ratkaise yhtälöryhmä $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ käyttämällä

a) Käänteismatriisia `inv`

b) MATLABin matriisijakoa `x = A\b`.

**Opetus:** Huomaa, että "matriisijako" on numeerisen tarkkuuden ja laskentatehon kannalta yleensä parempi tapa (mikä ei pienissä, hyvänlaatuisissa tehtävissä tule ilmi).

**Opettajalle:** Tehtävään voidaan lisätä myös A-matriisin muodostaminen diagonaaleittain **diag**-funktiolla (vaikkei mene hyödyn puolelle näin pienessä tehtävässä).

**72.** mlLi006a.tex, [Maple:mplLinis/mplLi010.tex]
(Kynä-paperitehtävä)
Tarkastellaan lämmönjohtumista ohuessa metallilevyssä. Oletetaan, että johtumista tapahtuu vain levyn suunnassa, ja levyn reunoilla on annetut (ajan suhteen) vakiolämpötilat. Levyn lämpötilat eri pisteissä asettuvat ajan kuluessa arvoihin, jotka ovat ajan suhteen vakioita, tällöin puhutaan lämpötilajakauman tasapainotilasta ("steady state"). Tehtävänä on määrittää lämpötilajakauma levyssä tasapainotilan vallitessa.

Tarkastellaan kuvan mukaista tilannetta: (Klikkaa oikealla olevaa pdf-linkkiä, niin kuva näkyy kunnolla.)

```
  --- 20----20---20----
 |    |     |     |    |
10----*-----*-----*---40
 |    |     |     |    |
10----*-----*-----*----40
 |    |     |     |    |
  ----20----20----20---
```

Kuvassa näkyvät annetut vakioreunalämpötilat (reunaehdot). Tehtävänä on laskea ratkaisuapproksimaatiot *:llä merkityissä sisäsolmupisteissä käyttäen seuraavaa periaatetta: Lämpötila levyn solmupisteessä on naapurisolmujen lämpötilojen keskiarvo.

Jos indeksoidaan solmupisteiden lämpötilat vaakarivijärjestyksessä: $T_1, \dots T_6$, voidaan ryhtyä kirjoittamaan yhtälöitä tyyliin:

$T_1 = \frac{20+10+T_4+T_2}{4}, \dots$.

Kirjoita koko $6 \times 6$- yhtälösysteemi "standardimuodossa".
**Huom:** Tasapainotilaratkaisu saadaan ns. *Laplacen yhtälön* $\nabla^2 T = 0$ ratkaisuna. Tässä esitettyyn likimääräismenettelyyn ns. *differenssimenetelmään*

Ratkaisua pyydetään seuraavassa tehtävässä.

**73.** mlLi006b.tex, [Maple:mplLinis/mplLi011.tex]
Ratkaise edellisen tehtävän yhtälösysteemi Maplea (tai Matlabia) käyttäen. (Tässä Maple-ohjeet.) Muodosta sitten edellisen tehtävän kuvan mukainen $4 \times 5$ matriisi, jossa on annetut reunalämpötilat sekä lasketut sisälämpötilat oikeilla kohdillaan. Ota nurkkapisteiden lämpötiloiksi kahden naapurisolmun lämpötilojen keskiarvo. Piirrä kuva, pyörittele hiirellä.

**Vihje: Maplevihje**

(Matlabissa et tarvitse vihjettä, vaan teet suoraan todella “matlabmaisesti”.)

Tehtävässä riittää käytellä LinearAlgebra-kirjaston funktiota `LinearSolve`.

Ratkaisuvektorin muokkaaminen matriisiksi onnistuu mukavasti, kun leikkaat/liimaat alla olevan funktiomäärityksen Maple-työarkillasi. (Suorita leikkaus pdf-tehtävätiedostosta.)

```
Reshape:=(vek,m,n)->Matrix(linalg[matrix](m,n,convert(vek,list)));
```

Funktio on tehty vastaamaan Matlabin funktion reshape käytöstä siinä tapauksessa, jossa vektori muutetaan annetun kokoiseksi matriisiksi.

Lämpötilamatriisin rakentelu kannattaa hoidella (Matlabinomaiseen) tyyliin:

```
Tsisa:=Reshape(T,2,3); # vektorissa T on ratkaisulampotilat.
Tiso:=Matrix(4,5,0);
vaaka:=<15|20|20|20|30>;
pysty:=...;
Tiso[2..3,2..4]:=Tsisa;
...
```

Piirtäminen komennolla `matrixplot` (muista with(plots):)

```
matrixplot(Tiso,axes=boxed);
```

Pyörittele kuvaa hiirellä.

**Huom:** Sanomattakin on selvää, että tehtävä sopii erikoisen hyvin Matlab:lle. Tässä pikemminkin näytetään, että Maplen LinearAlgebra-työkaluilla voidaan matkia Matlab-työtapaa ja päästä lähelle samaa käsittelymukavuutta.

Lisätehtävä: Tee ratkaisu Matlabilla!

Palataan asiaan perusteellisemmin Matlab-tehtävien yhteydessä, jolloin käsitellään lähemmin differenssimenetelmää.

**74.** mlLi006.tex

*Tasapainolämpötilajakauma metallilevyssä.*

Kuva esittää metallilevyä, joka on ylä- ja alapinnoiltaan lämpöeristetty ja jonka reunojen lämpötilat on kiinnitetty. (Lämpöä virtaa vain reunojen kautta.) Tasapainolämpötilajakauma saadaan *Laplacen yhtälön* $\Delta u = 0$ ratkaisuna. Numeerinen approksimaatio voidaan laskea ns. differenssimenetelmällä: Jaetaan levy sopivilla hilaviivoilla osiin ja numeroidaan näin muodostuvat solmupisteet. Menetelmä: Kunkin hilasolmun lämpötila on naapurisolmujen lämpötilojen keskiarvo. (Johdetaan kurssin lopulla.)

Muodosta $4 \times 4-$ yhtälösysteemi solmujen $1, 2, 3, 4$ lämpötilojen likiarvoille $u_1, u_2, u_3, u_4$. Ohje: Aloitetaan solmusta 1: $u_1 = \frac{1}{4}(30 + u_2 + u_3 + 10)$. Vastaavasti muut kolme solmua.

```
              20       20
    |----- o  ----  o ------|
    |                       |
    |                       |
 10 o      o 3      o 4     o  40
    |                       |
    |                       |
 10 o      o 1      o 2     o  40
    |                       |
    |                       |
    |----- o ------ o ------|
           30       30
```

(a) Ratkaise yhtälösysteemi ja sijoita ratkaisulämpötilat ao. hilapisteisiin.

(b) Muodosta $4 \times 4-$ matriisi, jossa on reunalämpötilat ja ratkaisemasi sisäpistelämpötilat sekä nurkissa lähinnä olevien kahden reunasolmun keskiarvot tähän tapaan: `U=[5 20 20 30;10 u3 u4 40; 10 u1 u2 40; 20 30 30 35];` Piirrä ratkaisupinnan approksimaatio: `mesh(U)` tai `surf(U)`.

**Avainsanat:**Lämpötilamatriisi, Laplacen yhtälön diskretointi, differenssimenetelmän alkeellisin perustehtävä, lineaarinen yhtälöryhmä.

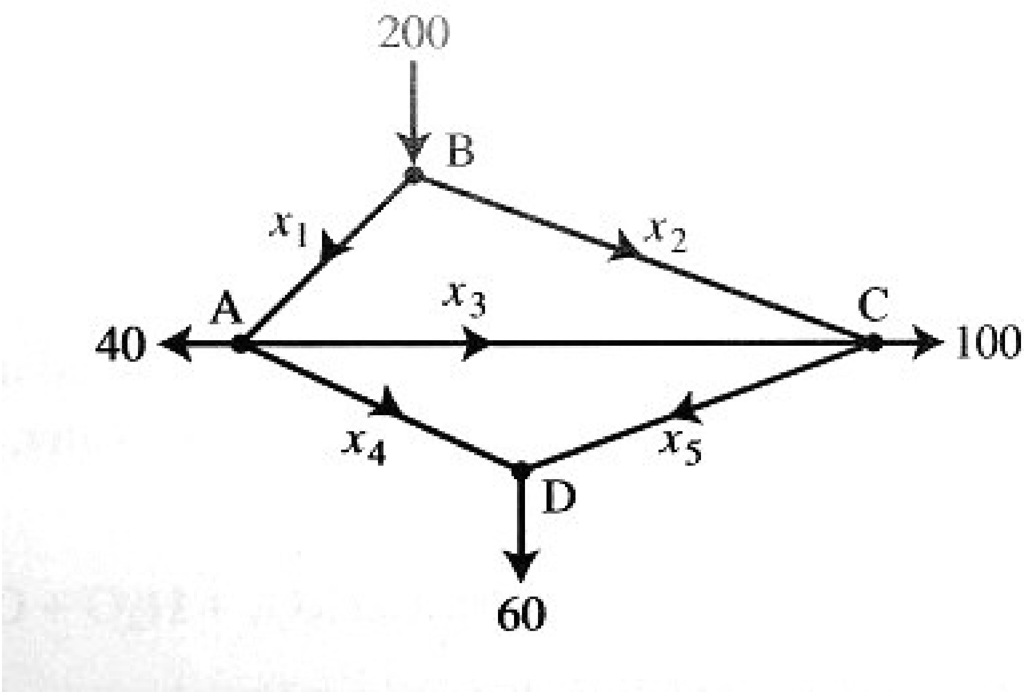
**75.** mlLi007.tex

Oheinen kuva esittää liikenneverkkoa. Kuhunkin solmuun A,B,C,D tulevien ja siitä lähtevien ajoneuvojen lukumäärien summa pysyy samana (solmuun ei häviä eikä siinä synny ajoneuvoja). Kadut ovat yksisuuntaisia nuolien osoittamalla tavalla.

Kuvan saat mukaan tehtävääsi, kunhan kopioit

**polku/img/liik.eps**-tiedoston omaan img-hakemistoosi. Tässä:

polku=http://www.math.aalto.fi/opetus/Mattie/MattieT/matlabteht/mlLinis/




(a) Muodosta yhtälösysteemi tuntemattomien ajoneuvomäärien $x_1, \ldots x_5$ suhteen.
(b) Määritä systeemin yleinen ratkaisu.
(c) Jos $x_4$:llä merkitty katuosuus suljetaan, niin mikä on yleinen ratkaisu?
(d) Määritä kohdan (c) tilanteessa pienin $x_1$ :n ja suurin $x_3$ :n arvo (jotta yhdensuuntaisuutta osoittavia liikennemerkkejä ei tarvitse kääntää).

Huom! Porrasmuotoon saattamisessa saat halutessasi käyttää Matlab/Octave-funktiota `rref` (kts. `help rref`).

**Avainsanat:** Liikenneverkko, lineaarinen yhtälöryhmä, (redusoitu)porrasmuoto, rref.

**76.** mlLi008.tex

1. Muodosta $5 \times 5$-yksikkömatriisi I. (`help eye`)
2. Muodosta matriisi $E_1$, jossa on vaihdettu $I$:n rivit 2 ja 5.
3. Muodosta matriisi $E_2$, joka saadaan kertomalla $I$:n 4. rivi luvulla 4.
4. Muodosta matriisi $E_3$, joka saadaan $I$:stä *Gaussin rivioperaatiolla*:

$$r_4 \leftarrow r_4 + 4\,r_1,$$

   missä $r_i$ tarkoittaa matriisin riviä numero $i$.

5. Muodosta matriisit $E_1^{-1}$, $E_2^{-1}$, $E_3^{-1}$ käyttäen komentoa `inv` ja selitä, mitä rivioperaatiota ne vastaavat.

**Avainsanat:** Alkeismatriisit, LU-hajotelma, Gaussin rivioperaatio, käänteismatriisi.

**77.** mlLi009.tex (KP3-ii, 2008, harj1)
Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

ja olkoot

$$E_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Muodosta matriisitulot $E_0A$, $E_1A$, $AE_1$ ja $E_2A$ ja selvitä, mitä nämä operaatiot tekevät matriisin $A$ riveille/sarakkeille.

**Avainsanat:** Alkeismatriisit, LU-hajotelma, Gaussin rivioperaatio

**Vihje:** Käsinlasku ja ajattelutehtävä, tarkistukseen voit hyödyntää Matlabin **syms**-komentoa tai voit tehdä symboliset matriisioperaatiot Maplella/Mathematicalla.

**78.** mlLi010.tex

**Harjoituksen (KP3-II/s. 2006) ohjetta:**

*Seuraavissa tehtävissä voitaisiin johonkin johtopäätökseen päästä determinantin avulla. Näissä harjoituksissa ei kelpuuteta tällaisia ratkaisuja, vaan harjoitellaan johtopäätösten tekoa rivioperaatioiden seurauksena.*

Osa tehtävistä on käsinlaskuun tarkoitettu, mutta niiden yhteydessä voidaan harjoitella samalla Matlab/Octave/Scilab-työskentelyä (Kts. MattieO).

Annettuna on $3 \times 3-$systeemin liitännäismatriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Muodosta rivioperaatioilla porrasmuoto "ref" — "row echelon form". Merkitse tukisarakkeet ja tukialkioiden paikat. Jatka sitten rivioperaatioita alhaalta ylöspäin päästäksesi redusoituun porrasmuotoon "rref".

**Avainsanat:** Lineaarinen yhtälöryhmä, Gaussin rivioperaatio, ref, rref, (redusoitu) porrasmuoto, row echelon form.

**79.** mlLi013.tex
Piirretään toisen asteen pintoja. Tätä varten tulee pinnat esittää parametrimuodossa

$$x_1 = x_1(u,v), x_2 = x_2(u,v), x_3 = x_3(u,v),$$

missä muuttujat $u$ ja $v$ saava arvoja jostain sopivasta alueesta. Esimerkiksi parametrisointi

$$\begin{cases} z_1 = r_1 \sin u \cos v, \\ z_2 = r_2 \sin u \sin v \\ z_3 = r_3 \cos u, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le u \le \pi \\ 0 \le v \le 2\pi \end{cases}$$

MATLAB ilmoittaa $\mathrm{R}^2$:n muuttujat tietyllä tavalla organisoituhin matriiseihin seuraavasti:

```
[U,V] = meshgrid(linspace(0,pi,21),linspace(0,2*pi,21));
```

Nyt ellipsoidin $r_1 = r_2 = r_3$ parametrisointi tehdään seuraavasti

```
Z1 = sin(U).*cos(V);
Z2 = sin(U).*sin(V);
Z3 = cos(U);
```

Kuvan tästä saa piirrettyä komennolla `surf(Z1,Z2,Z3)`. Kokeile miten pintä muuttuu, kun asetat kertoimiksi $r_k$ eri arvoja. Tutustu myös komentoon `axis`.

**80.** mlLi014.tex
Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} 0.0001x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

Tarkka ratkaisu on $[\frac{2}{1.9999}, \frac{3.9997}{1.9999}]^T$, joka 5:llä numerolla esitettynä on $[1.0001, 1.9999]^T$.

(a) Ratkaise yhtälösysteemi niin, että suoritat laskut (järjestystä vaihtamatta) 3:lla merkitsevällä numerolla. (Laske laskimella, Matlabilla tms. ja pyöristä kunkin operaation jälkeen tulos 3:een numeroon.)

(b) Tee samoin kuin (a)-kohdassa, mutta vaihda yhtälöiden järjestys.

Selitä, miksi (a)-tapauksessa tulee suuri suhteellinen virhe ( 100%:n suhteellinen virhe toisessa komponentissa), kun taas (b)-tapauksessa virhe on olematon.

**Avainsanat:** Lineaarinen yhtälöryhmä, Gaussin rivioperaatio, numeerinen ratkaisu, numeerinen lineaarialgebra, pyöristysvirhe.

**81.** mlLi015.tex

Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ -1 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ ja $= \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T$. Ratkaise yhtälö $Ax = b$ *osittaistuentaa* ("partial pivoting") käyttäen.
Olkoon $P$ permutaatiomatriisi (rivinvaihtomatriisi), joka määräytyy rivien vaihdoista. Muodosta hajotelma $PA = LU$.

Matlab:lla: `help lu`, `[L,U,P]=lu(A)` (Tämä siis vertailun vuoksi, tarkoitus on laskea käsin.)

**Avainsanat:** Lineaarinen yhtälöryhmä, Gaussin rivioperaatio, LU-hajotelma, numeerinen lineaarialgebra, (osittais)tuenta, "(partial) pivoting".

**Vihje:** Osittaistuenta tarkoittaa itseisarvoltaan suurimman tukialkion valitsemista pienen tukialkion aiheuttamien numeeristen ongelmien välttämiseksi. Matlab saattaa käyttää esim. ns. skaalattua osittaistuentaa, jolloin rivinvaihtostrategia voi olla erilainen.

**82.** mlLi017.tex
Muodosta "ylimääräytyvälle" yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

normaaliyhtälöt ja ratkaise pienimmän neliösumman (PNS,LSQ) mielessä. Piirrä suorat ja ratkaisupiste tasoon.

Vastaustarkistuskeino: Huomaa, että Matlab:n yhtälösysteemin ratkaisija: $x = A\backslash b$ on niin älykäs, että se ymmärtää ylimääräytyvässä tapauksessa suorittaa PNS-ratkaisun.

**Avainsanat:** Lineaarinen yhtälöryhmä, PNS,LSQ, pienimmän neliösumman menetelmä, LU-hajotelma, numeerinen lineaarialgebra, (osittais)tuenta, "(partial) pivoting".

**Vihje:**

**83.** mlLi018.tex

Huom: Käsinlasku täydennettynä pikku Matlab-osuudella.

Eräässä mittauksessa saatiin seuraava data:

```
xdata     1    2   3   4   5
ydata     1.8 2.7 3.4 3.8 3.9
```

Dataa mallinnetaan polynomilla $p(x) = c_1 x + c_2 x^2$.

(a) Muodosta PNS-tehtävän matriisi $X$ ja vektori $y$ siten, että tehtävä saadaan ylimääräytyväksi yhtälöryhmäksi $X c = y$.

(b) Ratkaise kerroinvektori $c$. Piirrä data ja PNS-polynomi samaan kuvaan.

**Vihje:** (b)-kohdassa saat mieluusti käyttää Matlab:ia. Tee kuitenkin vaiheittain matriikertolaskut, transpoosit ym., lopuksi toki voit tarkistaa "takakenolla". Piirrä samaan kuvaan datapisteet ja polynomi.

Piirtäminen käy näin:

```
xd=1:5; yd=[1.8 ...]; plot(xd,yd,'x'); hold on; kertoimet=[c2 c1 0]; x=linspace(1,5); y=polyval(
plot(x,y,'r'); xlim([0 6]); grid on
```

Huomaa, että *polyval* haluaa kertoimet korkeimmasta potenssista alkaen.

Vast: $p(x) = 1.76x - 0.2x^2$

**Avainsanat:** PNS,LSQ, pienimmän neliösumman menetelmä, käyrän sovitus, curve fitting, data fitting.

**84.** mlLi019.tex

Määritä PNS-ratkaisu tehtävälle $A\,x = b$, kun $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ja

$b = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}^T$. Hyödynnä QR-hajotelmaa, jonka voit muodostaa seuraavilla komennoilla: (Huom: Yleensä ei lasketa rationaaliaritmetiikalla, mutta opettelussa voi olla hyödyksi.)

```
>> format rational
>> A=[...]     % Jos kirjoitat [...], olet TONTTU!
>> [Q,R]=qr(A)
```

**Vihje:** Matlab muodostaa ns. täyden QR-hajotelman. Kuten huomaat, riittää ottaa Q:n kaksi ensimmäistä saraketta ja R:n 2 ensimmäistä riviä, miten nyt vain haluat. Huomaa siis, että Q on ortogonaalinen ja R on yläkolmiomatriisi.

**Avainsanat:** PNS,LSQ, pienimmän neliösumman menetelmä,QR-hajotelma.

**85.** mlLi020a.tex

**Ohjeita, ominaisarvo-oppia** (Liitettäväksi aiheen tehtäväpaperiin)

- **Ominaisarvo** on luku, se voi olla kompleksiluku, vaikka matriisi olisi reaalinen.
- **Ominaisvektori** on (reaalisen matriisin tapauksessa) $\mathbb{R}^n$:n tai $\mathbb{C}^n$:n vektori sen mukaan, onko vastaava ominaisarvo reaalinen vai kompleksinen.
- Ominais**arvo saa** aivan mainiosti **olla** 0, ominais**vektoriksi emme hyväksy nollavektoria**.
- Ominaisarvoon $\lambda$ liittyvä **ominaisavaruus** $E_\lambda$ koostuu kaikista $\lambda$:aan liittyvistä ominaisvektoreista ja lisäksi nollavektorista. Tällöin kyseessä on vektori(ali)avaruus, nimittäin matriisin $A - \lambda I$ nolla-avaruus, $N(A - \lambda I)$.
- Ominaisarvon $\lambda_j$ **algebrallinen kertaluku** $M_{\lambda_j}$ on karakteristisen polynomin $\det(A - \lambda I)$ juuren kertaluku. **Geometrinen kertaluku** $m_{\lambda_j}$ on $\dim(E_{\lambda_j})$.
  Pätee: $m_{\lambda_j} \leq M_{\lambda_j}$
- Jos reaalisella matriisilla $A$ on **kompleksinen** ominaisarvo $\lambda = \alpha + i\,\beta$, niin myös $\overline{\lambda} = \alpha - i\,\beta$ on $A$ :n ominaisarvo. Jos $\mathbf{v}$ on $\lambda$ :aa vastaava ominaisvektori, niin liittolukua $\overline{\lambda}$ vastaava ominaisvektori on $\overline{\mathbf{v}}$. (Tarkoittaa vektoria, jonka koordinaatit ovat $\mathbf{v}$ :n koordinaattien liittolukuja.)
- Jos on määrättävä diagonaalimatriisin ominaisarvot ja -vektorit, niin laskentatyötä ei jää lainkaan. Älä siis suotta ryhdy veivaamaan $\det(A - \lambda I)$:n kautta. (Koko ominaisarvohomman perustavoite on saattaa lineaarikuvauksen matriisi diagonaalimuotoon. Jos se jo on, niin mitään ei tarvitse enää tehdä, kunhan osaat siitä lukea.)

- Kolmiomatriisin (ylä- tai ala-) ominaisarvot ovat diagonaalialkiot. (Siis yleistys edelliselle, tässä tapauksessa ominaisvektoreista ei voida sanoa mitään yleistä.)
- Kun pyydetään laskemaan johonkin ominaisarvoon liittyvät ominaisvektorit, on sopivaa antaa vastaukseksi ominaisavaruuden kanta. Helpoimmin se saadaan antamalla ratkaisun vapaille muuttujille vuorollaan arvot $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ (jos kyseessä on 3-ulotteinen ominaisavaruus). Tässähän on kyse nolla-avaruuden kannan määräämistehtävästä.
- Eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat `LRT`.
- Diagonalisointi: Annettu $A$. Etsittävä, jos mahdollista, matriisit $V$ ja $D$, $V$ kääntyvä ja $D$ diagonaalimatriisi siten, että $A = VDV^{-1}$.
  Jos tehtävänä on diagonalisoida $A$, etsitään matriisit $V$ ja $D$ ja perustellaan $V$:n kääntyvyys. (Yleensä ei vaadita $V^{-1}$:n laskemista ilman eri kehoitusta, tai jatkotehtävän asettamaa tarvetta.)
- Octave/Matlab-komentoa `eig` kannattaa käyttää ainakin tarkistukseen. Muoto `[V,D]=eig(A)` antaa suoraan diagonalisointimatriisit: $V$ :n sarakkeina ominaisvektorit ja $D$ :n diagonaalilla (samassa järjestyksessä) ominaisarvot. Jos $A$ on diagonalisoituva, niin $V$ :n sarakkeet ovat LRT, jolloin voidaan muodostaa $V^{-1}$; Matlab/Octavella: `inv(V)`.

**Avainsanat:** Ominaisarvo-opin perus(lasku)ohjeita

**86.** mlLi020.tex
Suorita Matlab-komento `eigshow`. Opiskele helppiteksti ja suorita joitakin kokeiluja kuljettamalla $x$-vektoria läpi koko yksikköympyrän. (Tämä vain lämmittelyksi.)

Valitse erityisesti matriisit `A=[1 3;4 2]/4`, `B=[3 1;-2 4]/4` ja `C=[2 4;2 4]/4`. Määritä kuvan perusteella kunkin ominaisarvot ja -vektorit. Saat vektorit tarkemmin komentamalla `grid on`.
Mitä, jos kuvan perusteella ominaisarvoja/vektoreita ei näyttäisi olevan?
Määritä kuvan perusteella myös ominaisavaruuden dimensio matriisin $C$ tapauksessa.

Laske kunkin matriisin ominaisarvot ja -vektorit `eig`-komennolla. (`help eig`)

**Huom:** Jos näitä matriiseja ei sattuisi olemaan valmiina valikossa, voit ne sinne lisätä helppiruudun "View code for eigshow"-linkistä. Hae koodista kohta `mats =` .... Siitä näet, miten matriiseja voi lisätä. Jos editoit koodia, tallenna se omaan hakemistoosi vaikkapa nimelle `ominashow`, ja sitten vaan `ominashow`.

Tee joitakin omia kokeiluja erilaisilla matriiseilla oman "ominashow":n avulla.

**Avainsanat:** Ominaisarvot, ominaisvektorit, ominaisarvojen graafinen havainnollistaminen, ominaisvektorien graafinen havainnollistaminen, Matlab: eigshow, eig

**87.** mlLi021.tex (käsinlasku, Matlab sopii avuksi/opiksi)

Muodosta matriisin $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ortogonaalinen diagonalisointi (tarkoittaa ortonormaalia).

Laskutyön vähentämiseksi annetaan (tai pyydetään oppilasta komentamaan):

```
>> eig(A)
ans =
         -2.00
          7.00
          7.00
```

**Avainsanat:** Ominaisarvot, ominaisvektorit, ortogonaalinen diagonalisointi.

**Vihje:** Muista, että ominaisvektorit eivät automaattisesti ole yksikkövektoreita, ja useampikertaista ominaisarvoa vastaavat ominaisvektorit eivät automaattisesti ole ortogonaaliset.
Jos olet saanut samaan ominaisavaruuteen kuuluvat `LRT` ominaisvektorit $v_1$ ja $v_2$, niin ortonormaalin kannan saat
1) geometrisen ajattelun avulla: Muodosta $v_2$:n kohtisuora projektio $v_1$:llä ja vähennä se $v_2$:sta. Tai
2) algebrallisesti: Määritä kerroin kerroin $c$ siten, että $(v_1 + c\, v_2) \perp v_1$.

**88.** mlLi028.tex
Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

a) Laske matriisin $\mathbf{A}$ diagonalisointiin tarvittavat matriisit $P$ ja $D$.

b) Varmista, että $P$ on ortogonaalinen, ja $D$ on diagonaalinen ja diagonaalialkiot suuruusjärjestyksessä.

c) Osoita, että spektraalikaava

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \lambda_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_3^T = A$$

pätee.

**Vihje:**

**89.** mlLi029.tex
Potenssimenetelmä on eräs keino löytää itseisarvoltaan suurin ominaisarvo ja vastaava ominaisvektori. Menetelmä toimii seuraavasti:

- Valitse alkuarvaus $\mathbf{b}_0$. Ainoa vaatimus on, että tällä vektorilla on nollastapoikkeava komponentti ominaisarvon suuntaan – käytännössä kannattaa valita vektori, jonka jokainen alkio on nollasta poikkeava.
- Aseta
$$\mathbf{b}_{k+1} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{b}_k}{||\mathbf{A}\mathbf{b}_k||}$$
- Jatka kunnes jono $(\mathbf{b}_k)$ suppenee. Ominaisarvo $\lambda = ||\mathbf{A}\mathbf{b}_k||$ ja vektori $\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$.

Toteuta menetelmä MATLABissa, ja laske matriisin `gallery(5)` suurin ominaisarvo ja vastaava ominaisvektori. Testaa tuloksen oikeellisuus.

**90.** mlLi030.tex
Ominaisarvojen laskentamenetelmiä, Power method [KRE$^9$] Sec. 20.8
Sovella potenssimenetelmää (3 kierrosta) matriisiin

$$A = \begin{bmatrix} 3.5 & 2.0 \\ 2.0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

alkuarvolla $x_0 = [1, 1]^T$. Laske *Rayleigh-osamäärät* $q$ ja virherajat.

**Ratkaisu:** Vastaus: $q = 4, 4.493, 4.4999$; $|\epsilon| \leq 1.5, 0.1849, 0.0206$

**Avainsanat:** Potenssimenetelmä, ominaisarvojen laskentamenetelmät, Power method.

**91.** mlLi031.tex
Osoita, että jos $x$ on ominaisvektori, niin $\delta = 0$ virhekaavassa (2) Theorem 1 s. 872 (KRE$^9$, luvun 20.8, Power Method for Eigenvalues alkusivulla) .

**Vihje:** Päättelytehtävä, ohjelmistoista ei hyötyä.

**Avainsanat:** Potenssimenetelmä, ominaisarvojen laskentamenetelmät, Power method.

**92.** mlLi032.tex
(a) Päättele Gershgorinin lauseen avulla matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 0.4 & -0.5 \\ 0.4 & 7 & a \\ -0.5 & a & 4 \end{bmatrix}$$

ominaisarvojen likiarvot ja missä rajoissa ne ovat.

(b) Millä $a$:n reaaliarvoilla nähdään suoraan, että matriisi on kääntyvä. (Tarkoitus ei ole laskea determinanttia tai ominaisarvoja, korkeintaan halutessasi tarkistukseksi ja varmistuksesi Gershgorinin pätevyydelle.)

**Vihje:** Käsinlasku, jossa voit harjoitella Matlabin laskinkäyttöä.

**Avainsanat:** Gershgorinin lause , ominaisarvojen laskentamenetelmät, ominaisarvoarvio.

**93.** mlLi040.tex

Olkoot $\mathbf{A}$ kompleksinen $n \times n$ matriisi, ja olkoot $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, eli rivin alkioiden itseisarvojen summa diagonaalia lukuunottamatta. Gershgorinin kiekkolauseen väite on, että jokainen matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvo $\lambda_i$ sijaitsee jossakin kiekossa $D(a_{ii}, R_i)$, (kompleksitasoon piirretty kiekko, jonka keskipiste on pisteessä $a_{ii}$, ja jonka säde on $R_i$). Totea lauseen väite kokeellisesti, kun `A=10*randn(12)+ 5*randn(12)*i;`

**Vihje:** Ympyrän, jonka keskipiste on $(x, y)$ ja säde $r$ saa MATLABissa piirrettyä helposti seuraavasti:

```
x = 0.4; y= -0.34
t = 0:0.02:2*pi;
plot(x+cos(t),y+sin(t));
hold on
%Yksittäinen piste piirretään seuraavasti
plot(x,y,'r.');
```

**94.** mlLi050.tex

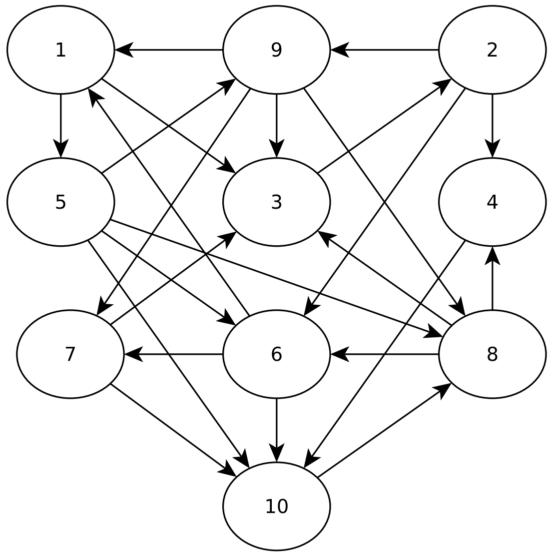
Gram-Schmidtin menetelmä vektorijoukon $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ortonormalisoimiseksi toimii seuraavasti:

- Ortogonalisoidaan:
  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$
  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1$
  $\vdots$
  $\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_n}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k} \mathbf{u}_k$
- Normitetaan: $\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{||\mathbf{u}_i||}, i = 1 \ldots n$

Kirjoita MATLAB-funktio `B = grmsch(A)` joka hakee Gram-Schmidtin menetelmällä ortonormaalin kannan matriisin $\mathbf{A}$ sarakeavaruudelle. Testaa ortonormaalius laskemalla `B'*B`.

**Vinkki:** Laskutoimitus $\frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_n}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k} \mathbf{u}_k$ vastaa toimitusta $(\mathbf{u}_k^T \mathbf{v}_n)\mathbf{u}_k$. **Lisätehtävä nopeille:** Matriisin sarakeavaruuden normalisointi ei poikkea kovin paljon QR-hajotelman tekemisestä. Jos ehdit, toteuta oma algoritmisi QR-hajotelmalle.

**95.** Seuraava kuva esittää kymmenen sivun ”internettiä”.




Laske tämän verkon tärkein sivu käyttämällä PageRank-algoritmia:

- Luo verkon vierusmatriisi $A = [a_{ij}]$, missä

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jos sivulta j on linkki sivulle i} \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$$

- Laske vierusmatriisin suurin ominaisarvo, ja vastaava ominaisvektori.
- Normalisoi laskemasi suurinta ominaisarvoa vastaava ominaisvektori (jaa kaikki vektori alkiot vektorin summalla). Mikä on tämän verkon tärkein sivu.
- Piirrä verkkon kuva käyttäen laatimaasi vierusmatriisia ja `gplot`-komentoa. Tutustu `gplot`in help-sivuun.

## mlMatriisit

**96.** Potenssimenetelmä on eräs keino löytää magnitudiltaan isoin ominaisarvo ja -vektori. Menetelmä toimii seuraavasti:

- Valitse alkuarvaus $\mathbf{b}_0$. Ainoa vaatimus on, että tällä vektorilla on nollastapoikkeava komponentti ominaisarvon suuntaan – käytännössä kannattaa valita vektori, jonka jokainen alkio on nollasta poikkeava.
- Aseta
$$\mathbf{b}_{k+1} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{b}_k}{||\mathbf{A}\mathbf{b}_k||}$$
- Jatka kunnes jono $(\mathbf{b}_k)$ suppenee. Ominaisarvo $\lambda = ||\mathbf{A}\mathbf{b}_k||$ ja vektori $\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$.

Toteuta menetelmä MATLABissä, ja laske matriisin `gallery(5)` isoin ominaisarvo ja -vektori. Testaa tuloksen oikeellisuus.

**Vihje:**

**97.** Tehdään LU-hajotelma tuentaa hyväksikäyttäen. Ensimmäiseksi, yritetään ymmärtää, kuinka tuenta toimii seuraavan pseudokoodin avulla.

[Kommentoitu pois codebox-osuus]

Kirjoita vastaava MATLAB-funktio, ja ratkaise sen avulla ongelma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kun

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 12 \\ 3 & 12 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 29 \\ 21 \\ 45 \end{bmatrix}.$$

Kokeile sitten ratkaista ongelma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kun $\mathbf{A}$ on $18 \times 18$ Hilbertin matriisi, ja $\mathbf{b} = \mathbf{A}[1]_{18}$,

**Vihje:**

Hilbertin matriisi MATLABina:

```
A = hilb(18);
b = A*ones(18,1);
```

**98.** Gram-Schmidtin menetelmä vektorijoukon $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ortonormalisoimiseksi toimii seuraavasti:

- Ortogonalisoidaan:
  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$
  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u_1 \cdot v_2}}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1$
  $\vdots$
  $\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v_n}}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k}\mathbf{u}_k$
- Normitetaan: $\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{||\mathbf{u}_i||}, i = 1 \ldots n$

Kirjoita MATLAB-funktio `B = grmsch(A)` joka hakee Gram-Schmidtin menetelmällä ortonormaalin kannan matriisin $\mathbf{A}$ sarakeavaruudelle. Testaa ortonormaalius laskemalla `B'*B`.

**Vinkki:** Laskutoimitus $\frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v_n}}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k}\mathbf{u}_k$ vastaa toimitusta $(\mathbf{u}_k^T \mathbf{v}_n)\mathbf{u}_k$. **Lisätehtävä nopeille:** Matriisin sarakeavaruuden normalisointi ei poikkea kovin paljon QR-hajotelman tekemisestä. Jos ehdit, toteuta oma algoritmisi QR-hajotelmalle.

**Vihje:**

**99.** Matriisi $(a_{ij}) = \mathbf{A} \in \mathrm{R}^{n \times m}$ on *yläkolmiomatriisi*, jos $a_{ij} = 0$ kun $i > j$.
(a)Kirjoita MATLAB funktio, joka ratkaiseen yhtälöryhmän $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kun $\mathbf{A}$ on yläkolmiomatriisi.
(b) Generoi satunnaisia yläkolmiomatriiseja, ja tutki josko

(1) kahden yläkolmiomatriisin tulo on aina yläkolmiomatriisi,

(2) yläkolmiomatriisin käänteismatriisi on aina yläkolmio.

(3) determinantti on aina nollastapoikkeava.

**Vihje:** Satunnaisia matriiseje voi luoda kommennoilla `rand` ja `randn`. Näitä kertomalla saa matriiseja joiden arvot ovat millä vain halutulla välillä. Yläkolmion saa matriisista $\mathbf{A}$ komennolla `triu(A)`.

**100.** Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

a) Laske matriisin $\mathbf{A}$ diagonalisointiin tarvittavat matriisit $P$ ja $D$.

b) Varmista, että $P$ on ortogonaalinen, ja $D$ on diagonaalinen ja diagonaalialkiot suuruusjärjestyksessä.

c) Osoita, että spektraalikaava

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \lambda_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_3^T = A$$

**Vihje:**

## mlNonlinequ, Epälineaariset yhtälöt

**101.** Määritä funktion

$$f(x) = 12(x-1)\sin\frac{x}{x^2 + 0.4x + 0.1} \qquad x \in [-4, 4]$$

kaikki nollakohdat (33 kpl).

**102.** Historiallisesti mielenkiintoinen yhtälö on

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

jota Wallis-niminen matemaatikko käsitteli, kun hän ensi kertaa esitteli Newtonin menetelmää Ranskan akatemialle. [Lähde: Moler NCM]

1. Piirrä kuvaaja saadaksesi alkuarvon Newtonin menetelmälle reaalijuurta varten.
2. Määritä reaalijuuri omanewton:lla Neuvo: Polynomifunktion voit määritellä tähän tapaan, kun p on kerroinvektori:

   ```
   pf=@(x) polyval(p,x)
   ```

   Derivaatan saat polyder- (tai omapolyder)-funktiolla.
3. Yritä löytää kompleksijuuri antamalla kompleksisia alkuarvoja. (Jos löydät yhden, niin toinen on sen liittoluku.)
4. Määritä juuret roots-funktion avulla.

**Vihje:**

**Ratkaisu:**`M1N101ratk.m`[Tulee]

**103.** [NCM 4.15, p. 138]

Keplerin malli:

$$M = E - e\sin,\ E$$

1. Ratkaise fzero:lla
2. Sarjakehitelmä:
$$E = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_m(me)\sin(mM)$$

**Vihje:**

**Ratkaisu:**`M1N102ratk.m`[Tulee]

**104.** [NCM 4.15, p. 138]

Vesiputken syvyys, jotta ei jäädy.

**Vihje:**

**Ratkaisu:**`M1N1xxratk.m`[Tulee]

**105.** Välinpuolitusmenetelmä on eräs tapa löytää funktion nollakohta. Bolzanon lauseen nojalla, jos jatkuvalla funktiolla on jonkin suljetun välin $[a, b]$ päätepisteissä erimerkkiset arvot, sillä on vähintään yksi nollakohta tällä välillä. Välinpuolitusmenetelmä toimii seuraavasti:

- Laske välin $[a, b]$ keskikohta $m = \frac{b-a}{2}$.
- Laske $f(m)$. Jos $f(m) = 0$, ollaan löydetty nollakohta ja lopetetaan algoritmi.
- Jos $f(m)$:n merkki on sama kuin $f(a)$:n, voidaan tutkittavan välin vasenta päätepistetta siirtää kohtaan $m$, eli $a \leftarrow m$, ja palataan algoritmin kohtaan 1.
- Jos $f(m)$:n merkki on sama kuin $f(b)$:n, voidaan tutkittavan välin oikeaa päätepistetta siirtää kohtaan $m$, eli $b \leftarrow m$, ja siirrytään algoritmin kohtaan 1.

Tätä ideaa noudattaen, laske funktion $f(x) = e^{\sin(x^2)}e^{-x^2}\sin(x^2) - \frac{1}{2}$ välillä $[0, 1]$ sijaitseva nollakohta.

**Vihje:** Numeerisessa tapauksessa absoluuttisen nollan löytäminen on lähes mahdotonta – sinun tulee määrittää jokin hyväksyttävä toleranssi. Funktion arvojen samanmerkkisyyttä voidaan tutkia laskemalla näiden tulo: jos kahden luvun tulo on positiivinen, ovat ne samanmerkkisiä.

**106.** Sekanttimenetelmä on toinen funktion nollakohtien löytämiseen käytettävä menetelmä. Sekantti on suora joka leikkaa annettua käyrää kahdessa pisteessä. Sekanttimenetelmän idea on approksimoida annettua funktiota $f$ välillä $[a, b]$ pisteiden $f(a)$ ja $f(b)$ välille piirretyllä suoralla. Tämän suoran, ja x-akselin välinen leikkauspiste otetaan välin uudeksi päätepisteeksi. Iteraatiokaavaksi saadaan näin

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Sekanttimenetelmä suppenee yleensä, mutta ei aina, nopeammin kuin välinpuolitusmenetelmä.

Sekanttimenetelmää käyttäen laske funktion

$$g(x) = \cos(\frac{1}{2}\sqrt{x})^2\sqrt{x^3\pi}$$

välillä $[0, 5]$ sijaitseva nollakohta.

**Vihje:** Tälle funktiolle ja tälle menetelmälle on mahdollista löytää alkuarvo, jolla menetelmä ei toimi: kokeile siis useaa arvausta.

**107.** Matlab/Maple/Mathematica
H2T17/mlNl100/mplY100/mmaY100

Etsi yhtälön $x^8 - 36x^7 + 546x^6 - 4536x^5 + 22449x^4 - 67284x^3 + 118124x^2 - 109584x + 40320 = 0$ välillä $[5.5, 6.5]$ oleva juuri. Muuta $x^7$:n kerroin luvuksi $-36.001$ ja katso, mikä vaikutus sillä on juureen.

**Vihje:** Maple: `fsolve`
Matlab: `roots` Mathematica: ...

**Ratkaisu:** Ratkaisutiedostossa lisää variaatioita ja analyysiä tehtävään.
**Avainsanat:** Polynomin juuret, numeriikka, häiriöalttius, ill-conditioned

**108.** Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1^3 x_2 - 2 & = 0 \\ \sin(x_1) - 1 & = 0 \\ x_3^2 - 3 & = 0 \end{cases}$$

käyttäen Newtonin menetelmää. Tutki suppenemista eri alkuarvoilla.

**Vihje:** Tehtävässä tarvittava Jacobin matriisi kannattaa (ehkä) tehdä spesifinä funktiona.

**109.** Maple,Matlab,[Mathematica] (H2T8)

Newtonin menetelmän askel voidaan määritellä vähäeleisesti Maplelle. Määritellään iterointifunktio:

```
> N := x -> evalf(x - f(x)/D(f)(x));
```

Iterointi tapahtuu joko for-silmukalla tai iterointioperaattorilla `N@@k`. (For silmukka lienee tehokkaampi, kun halutaan muodostaa koko iterointijono.) Ratkaise seuraavat yhtälöt Newtonin menetelmällä. Sopivat alkuarvot vaikkapa kuvan avulla.

a) $x \cos x = \sin x + 1, \quad 0 < x < 2\pi$

b) $x^2 + \sin x = 8$

**Vihje:** Matlab-tehtävässä on antoisinta tehdä Maple-Matlab-työnjako: Muodostetaan ensin iteraatiokaava Maplella symbolisessa muodossa (jätetään yllä N-kaavasta *evalf* pois) ja siirretään kaava Matlabiin (`lprint`, Matlabissa `vectorize` lisää pisteet.

Kaikkein kätevintä lienee käyttää Symbolic Toolboxia symboliseen derivointiin, jos se on käytettävissä.

**Avainsanat:** Epälineaarinen yhtälö, Newtonin menetelmä, iteraatio

**110.** Maple , Matlab (H2T9)

Tarkastellaan väestönkasvumallia

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{v}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1),$$

jossa otetaan huomioon biologisen lisääntymisen ohella myös maahanmuutto, jonka oletetaan tapahtuvan vakionopeudella $v$ yksilöä vuodessa (netto). Oletetaan, että tietty populaatio on alunperin $10^6$ yksilöä, 435000 yksilöä muuttaa "maahan"1. vuoden aikana ja populaatiossa on 1564000 yksilöä vuoden lopulla. Määritä luku $\lambda$ Käytä tätä $\lambda$:n arvoa ennustamaan populaation koko toisen vuoden lopussa, kun oletetaan maahanmuuttovauhdin säilyvän vakiona.

**Vihje:** Maple: `fsolve`, Matlab: `fzero`

**Avainsanat:** Epälineaarinen yhtälö, väestönkasvumalli, epalineaarinen yhtalo, vaestonkasvumalli.

**111.** Newtonin menetelmä lienee kaikista funktion juuren etsimiseen käytetyistä menetelmistä kuuluisin. Toisin kuin aikaisemmin esittelemämme menetelmät, se ei edellytä tietoa juuren sijainnista, mutta toisaalta se ei aina välttämättä suppene kohti juurta.

Newtonin iteraatioilla tarkasteltavilta funktioilta odotetaan jatkuvuutta ja derivoituvuutta. Newtonin iteraatiokaava on

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Käyttäen aikaisemmin kirjoittamaasi numeerista derivointikaavaa, ja etsi funktion $f(x) = e^{\sin(x^2)}e^{-x^2}\sin(x^2) - \frac{1}{2}$ nollakohtia käyttäen Newtonin menetelmää. Käytä alkuarvoina ainakin arvoja $0.5, 12.2$ ja $2.2$. Kuten huomataan, alkuarvoilla on todella dramaattinen vaikutus siihen, kuinka ja minne menetelmä suppenee.

Kokeile sitten ratkaista funktion $g(x) = x^3 - 2x + 2$ nollakohta Newtonin menetelmällä käyttäen alkuarvauksena $x_0 = 1$. Mitä tapahtuu? (vinkki: `Ctrl + C` lopettaa ikuisen luupin.)

Viimeisenä kokeile ratkaista funktion $h(x) = 1 - x^2$ nollakohta Newtonin menetelmällä käyttäen alkuarvauksena $x_0 = 0$. Mitä tapahtuu?

**Vihje:** Numeerisissa tapauksissa etsitään nollakohtaa jollain sopivalla toleranssilla. Derivaattana kannattaa käyttää määritelmän sijasta 3-pisteen sääntöä:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

kun $h$ on pieni.

**112.** Kun $z = x + iy$ ja $-2 \leq x, y \leq 2$, eksponenttifunktion $z \mapsto \exp(z)$ kuvaajan voi piirtää seuraavasti:

```
t = -2:0.2:2;
[x y] = meshgrid(t,t);
z = x+i*y;
r = exp(z)
mesh(real(r));
```

Imaginääriosan saa piirrettyä komennolla `mesh(imag(r))`. Tee vastaavat graafit seuraavista kuvauksista edellämainitulla välillä.

1. $z \mapsto \log(z)$
2. $z \mapsto z^2$
3. $z \mapsto z + 1/z$

**Vihje:**

**113.** Määritellään

$$S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

Näytä että jokaiselle kiinnitettylle arvolle $x$ luku $S_n(x)$ lähestyy nollaa, kun $n \to \infty$, ja etsi $S_n(x)$:n ääriarvot $x$:n suhteen. Piirrä funktio $S_n(x)$ välillä $[-2, 2]$ kun $n = 2, 4, 6, 8, 10$.

**Vihje:** Ohjelman suorituksen voi keskeyttää kesken skriptin komennolla `pause`. Välin voi määritellä joko vektorinotaatiolla `-2:0.02:2` tai komennolla `linspace(-2,2,100)`.

## matlabteht/mlPerusteet, Matlab-perusteita

**114.** mlP001a.tex

Olkoon `z = [0 -1 2 4 -2 1 5 3]`, ja `J = [5 2 1 6 3 8 4 7]`.
Mitä syntyy seuraavilla Matlab-komennoilla (sijoitetaan tilan säästämiseksi useita samalle riville.)

```
x = z', A = x*x', s = x'*x, w = x*J,
length(x), length(z)
size(A), size(x), size(z), size(s)
```

**Vihje:** Suorita doc length, doc size, tai etsi Matlabin Help index:n avulla (lisä)tietoa komennoista.

**115.** mlP001.tex

**Matlab-pikaohje**

1. Komennon suorittama tulos tulee ruudulle ENTER-painalluksen jälkeen (kuvat erilliseen ikkunaan). Jos haluat estää tulostuksen, päätä komento puolipisteeseen. Jos myöhemmin haluat katsoa muuttujan sisällön, kirjoita sen nimi (ilman puolipistettä). Jos muuttuja on suuri matriisi, kannattaa ensin katsoa sen koko `size(A)` tai sen jotain osaa, esim. `A(1:10,1:10)`. Tai klikkaa "workspace"-ikkunan muuttujaikonia.

2. Edellisen komennon tulos on muuttujassa `ans`. Yleensä on suositeltavaa antaa tulokselle oma nimi tyyliin `nimi= ...`

3. Nuoliylös-näppäimellä (↑) voi selata aikaisempia komentoja. Käytä ahkerasti komentoja `help, doc`.

4. `format long` : Tulostetaan enemmän numeroita (n. 16). Laskutarkkuuteen tämä ei vaikuta.
   `format rational` laskee rationaaliluvuilla.
   `format short`: Paluu oletustulostukseen.

5. Matriisi saadaan aikaan tyyliin: `A=[2 4 3;0 1 -1;3 5 7]`. Vektori saadaan näin:
   `v=[1 2 3]`. Pystyvektorissa käytetään erottimena puolipistettä (tietysti, vrt. matriisi A yllä). Matriisikertolaskun merkki on `*` (Edellistä virkettä ei voi päättää pisteeseen!)

6. Matriisin `A` transpoosi: `A'` (reaalisessa tapauksessa).

7. Kokonaislukuvektori: Esim `1:10` tai `1:2:20`. Myös `linspace`. Pystyvektoriksi transponoimalla.

8. `A(i,j)` A:n alkio (i,j).
   `A(2,:)` A:n 2. rivi
   `A(:,3)` A:n 3. sarake
   `A(1:4,1:4)` osamatriisi
   Matriisin osaa voi päivittää, vaikkapa:
   `A(1:4,1:4)=ones(4,4)` tai
   `A(2,:)=A(2,:)-2*A(:,1)` (Gaussin rivioperaatio).

9. Matriisien liittäminen: Jos $A$:lla ja $B$:llä on yhtä monta riviä, ne voidaan liittää peräkkäin: `[A b]`
   (tai `[A, b]`). Jos yhtä monta saraketta, niin allekkain: `[A;B]`

10. Laskutoimitukset tarkoittavat matriisilaskua. Siis esim.
    `A*B, A^p` (jälkimmäinen mahdollinen vain neliömatriisille)

11. Vektorien ja matriisien (samankokoisten) pisteittäinen eli alkioittainen laskenta tapahtuu lisäämällä eteen piste. Esim: `u=[1 2 3], v=[-2 -2 -2], u.*v`. Toinen operandi voi olla skalaari. Siten esim. vektorin $u$ kaikki komponentit voidaan korottaa toiseen komennolla `u.^2`
    (Ei siis tarvitse tehdä: `u.^(2*ones(size(u)))`, joka tietysti toimii.)

12. Piirtämistä varten muodostetaan $x$-vektori, joka edustaa diskretoitua $x$-akselia ja lasketaan a.o. funktion arvo vektoriin $y$.
    Piirto: `plot(x,y);`

**116.** mlP002.tex
Muodosta vektori, joka koostuu parillisista kokonaisluvuista välillä $[21, 66]$.

**117.** mlP003.tex
Olkoon `x=[2 5 1 6 7 4 3 2 1 11]`.

1. Lisää jokaiseen alkioon luku 12
2. Lisää 3 parittomien indeksien osoittamiin alkioihin.
3. Laske vektorin alkioiden neliöjuuri.
4. Laske vektorin alkioiden neliöt ja neliösumma.

**Vihje:** Helppo tapa vektorin v indeksivektorin muodostamiseen:

`ind = 1:length(v)`
Miten siis parittomat indeksit?
Summaus sujuu helposti: `help sum`

**Avainsanat**: Matlab-alkeet, vektorien muodostus,vektorioperaatiot, indeksointi, kaksoispiste(:) .

**118.** mlP004.tex
Olkoon `x = [3 2 6 8 0 -1]' ja y=[4 1 3 5 0 0]'`

1. Lisää vektorin x alkioiden summa vektoriin y
2. Korota vektorin x alkiot vektorin y vastinalkioiden osoittamiin potensseihin.
3. Jaa y:n jokainen alkio vektorin x vastinalkiolla.
4. Kerro x:n jokainen alkio y:n vastaavalla alkiolla ja talleta tulos muuttujaan z

**Vihje:** Tässä harjoitellaan aritmetiikkaa vektorilausekkeilla. Muista piste (.) laskuoperaation edessä (paitsi $+, -$). Summaukseen: `help sum`
Lue: `help NaN` ja `help inf` .
**Huomaa:** Matlab:lle $0^0 = 1$ (eikä `NaN`)

**119.** mlP005.tex
Muodosta vektori x, joka koostuu alkioista:

1. $2, 4, 6, 8, \ldots, 20$
2. $10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, \ldots, -10$
3. $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots, 1/10$
4. $0, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots, 1/10$

**Vihje:** Kahdessa viimeisessä kohdassa voit selkeyttää komentamalla:
`format rational`
Paluu oletusformaattiin: `format`

**120.** mlP006.tex
Määrittele vektorit

```
x = [1 2 3 4 5]
y = [0 2 4 6]
z = [-4 -2 0 2 4 ]
```

Kokeile seuraavia laskutoimituksia/komentoja:

```
x.*z
x*z'
x*z               % Miksi virhe ?

x.^2              % Mika vektori?
x^2               % Miksi virhe ?

sqrt(x*x')
sqrt(sum(x.^2))   % Miksi sama tulos kuin edella?
norm(x)
help norm
```

**Vihje:**

**121.** mlP007.tex
Määrittele matriisit

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Selvitä (ilman Matlabia), mitkä seuraavista laskutoimituksista on määritelty, ja kerro sanallisesti, mitä ne tekevät. Tarkista MATLAB:lla.

```
A*C   C*A    C^2    C.^2   A^2    A.^2
```

**Vihje:** Tee skripti, jossa kukin laskutoimitus on omana %%-merkeillä erotettuna lohkonaan tyyliin:

```
%%
A*C % Lyhyt selitys
%%
C*A % Lyhyt selitys
%%
...
```

Vie kursori kuhunkin lohkoon vuorollaan ja `CTR-ENTER`, ja seuraa MATLAB-komentoikkunan tapahtumaa.

Avainsanat: Matlab perusteet, Matriisikertolasku, taulukko-operaatiot.

**122.** mlP008.tex

Edellisen tehtävän lyhennetty versio.

Määrittele matriisit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix},$$

Kokeile ja selitä:

```
A*B  B*A  A^2  A.^2  B^2  B.^2
```

**Vihje:** Tee skripti, jossa kukin laskutoimitus on omana %%-merkeillä erotettuna lohkonaan tyyliin:

```
%%
A*C % Lyhyt selitys
%%
C*A % Lyhyt selitys
%%
...
```

Vie kursori kuhunkin lohkoon vuorollaan ja `CTR-ENTER`, ja seuraa MATLAB-komentoikkunan tapahtumaa.

Avainsanat: Matlab perusteet, Matriisikertolasku, taulukko-operaatiot.

**123.** mlP009.tex
Vrt. opas:
`http://math.tkk.fi/~apiola/matlab/opas/mini/vektgraf.html#alkulukuskripti`

Avaa uusi m-tiedosto (skripti) vaikkapa alkulukuja.m . Kirjoita siihen komennot, joilla saat selville kaikkien korkeintaan N:n suuruisten alkulukujen lukumäärän ja summan. Laske lisäksi lukumäärän suhde kaikken lukujen $\leq N$ lukumäärään, ja myös sama summille.
Aloita tiedosto näin:

```
%% Selita, mita skripti tekee ja vaikka oma nimi, pvm. ym.
N = 100
alkuluvut= ...
lkm = ...
summa= ...
...
```

```
Apu: help primes (tai doc primes)
help sum .
```

Myöhemmin: opitaan tekemään funktio-m-tiedostoja, jolloin N voidaan antaa parametrina omalle "alkulukuja-funktiolle.

**Vihje:**

Avainsanat: mlPerusteet, Matlab perusteet, skripti, m-tiedosto, alkuluvut, sum

**124.** mlP010.tex

1. Miten kääntäisit vektorin v alkiot vastakkaiseen järjestykseen kaksoispisteen (:) avulla?
2. Entä matriisin A sarakkeet, vastaavasti rivit?
   **Huom:** Näihin on myös valmiit funktiot: `fliplr, flipud` "LeftRight, Up-Down"
3. Miten limität ("merge") kaksi samanpituista vektoria $u$ ja $v$?
   Tarkoitus on siis muodostaa vektori $w = [u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots]$

   **Vihje:** Liitä vektorit allekkain ja jonouta näin saatu 2-rivinen matriisi sarakkeittain (ovelaa). (Sarakkeittain jonoutus matriisille $A$ saadaan näin: `A(:)`.)

**Avainsanat**: mlPerusteet, Matlab perusteet, fliplr,flipud, kaksoispiste (:), käänteinen järjestys, kaanteinen jarjestys, matriisin jonoutus, "merge", limitys

**125.** **Matriisin kokoaminen osista, lohkomatriisit, skriptit**

Nyt jo viimeistään on syytä ottaa skriptit käyttöön. Kts. skriptiohjetta (laitetaan myös tähän) (myös help script) (Itse asiassa skriptillä kannattaa aloittaa koko Matlab harrastus.)

Tutustu helpin avulla funktioihin: `eye, ones, zeros, diag, size`.
Aloita sitten hommat avaamalla uusi skripti-tiedosto, jonne kirjoitat kommentit ja komennot.

Olkoot $Y_{n\times k}$ ja $N_{n\times k}$ ykkösistä ja vastaavasti nollista koostuvia $n \times k$-matriiseja ja olkoon $I_{n\times n}$ yksikkömatriisi. Muodosta seuraavat (lohko)-matriisit esim. arvoilla $n = 4, k = 3$. Rakenna skripti siten, että näitä on helppo muutella.

$$A = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & Y_{n\times k} \\ N_{k\times n} & I_{k\times k} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} N_{n\times n} & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & N_{n\times n} \end{bmatrix}$$

a) Poimi $A$ :n pää- ja sivulävistäjä. **Neuvo:** Jälkimmäisessä on hyötyä vaikkapa `fliplr`-komennosta.

b) Poimi B:n “alalävistäjät”, jotka alkavat 4:n askeleen päässä päälävistäjästä 1. vaaka- ja 2. pystysuunnassa. (Edelleen: `help diag`).

Lopuksi voit käyttää `publish`-komentoa dokkarin aikaansaamiseksi. Totuttele tähän, ohjeita on ... (tähän viittauksia).

**Avainsanat:** mlPerusteet, matlabperusteet, Lohkomatriisit, skriptit, m-tiedostot, diag.

**126.** mlP012.tex
Taikaneliön saa komennolla magic(n) . Muodosta muutamalla pienehköllä n:n arvolla matriisin M=magic(n) rivisummat, sarakesummat, lävistäjäsumma ja sivulävistäjäsumma.

Taikaneliöillä on mielenkiintoinen historia. Ne tunnettiin Kiinassa 2000 vuotta e.a.a. `http://www.mathworks.com/moler/intro.pdf` Kts. Molerin kirjan introsta s. 18 alk. Myös Matlab:n dokumentaatiosta.

**Avainsanat:** mlPerusteet, matlabperusteet, taikanelio, magic, rivisummat, sarakesummat,diag

**127.** mlP013.tex

Tässä vähän keskeneräistä muotoilua, mutta sopii “taikateemaan”. Tarkennellaan, kun ehditään ...

Taikaneliöillä voisi demonstroida Markovin prosesseja, ehkä jätetään ominaisarvolaskujen yhteyteen. (vrt. `http://math.tkk.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/tehtavia1.html` teht. 6)

Tässä on joku, liittyy johonkin...
`http://math.tkk.fi/opetus/v/matlab/opas/osa2.html#luku251`

Matlab-opas/elo/touko2010-sivuilla tarkempi tehtäväseloste.

**Vihje:**

**Ratkaisu:**

**Avainsanat:** Markovin matriisit, prosessit, ominaisarvot.

**Liittyy:** Lineaarialgebra/ominaisarvot. Aiemmissa kurssimatskuissa, myös Solmukirjoituksessa, koetehtävissä on monia tehtäviä ratkaisuineen.

**128.** mlP014.tex, mplP014.tex
Maple [Mathematica] , Matlab (erityisesti b)-kohta).

Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = 1 + \frac{sin(x)}{1+x^2}.$$

a) Maple: Määrittele f lausekkeeksi, laske f:n arvo pisteessä $x = -2.0$ ja piirrä kuvaaja välillä $[-5, 5]$.

Matlab:
Tee vastaava asia Matlabilla, kirjoita skripti. Huomaa, että Matlabissa täytyy ensin antaa x:lle numeerinen (vektori)arvo.

b) Tee samat asiat, mutta nyt määrittelemällä f funktioksi.

**Vihje:**

a)

```
   Maple                                Matlab:

> f:=1-...                             >> x=...
> subs...                              >> f=...
> plot                                 >> plot
```

b)

```
    Maple                              Matlab

> f:=x->1-...                         >> f:=@(x) 1-...
```

**Ratkaisu:** Ratkaisu:

```
mplPerusteet/mplP014R.mw  ja .pdf
mlPerusteet/mlP014R.m ja .pdf
```

**Luokittelu**:
`mplteht/mplPerusteet/mplP014.tex`, `matlabteht/mlPerusteet/mlP014.tex`
**Avainsanat:**
Mapleperusteet, funktiot, lausekkeet, Matlabperusteet

**129.** Rekursiokaava

$$x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$$

suppenee kohti lukua $\sqrt{a}$. Kirjoita MATLAB-skripti, jolla voit tarkastella tätä suppenemista, kun $a = 5$. Tee tulostus muodossa

| $n$ | $x(n)$ | Error |
|---|---|---|
| 0 | 1 | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | |
| 6 | $\ldots$ | |

**Vihje:** Suppenemisen tutkimisessa kannattaa käyttää `for` -luuppia. Yksinkertaisimmillaan se toimii syntaksilla `for k = alkuarvo:loppuarvo`, jolloin muuttuja k saa arvokseen jokaisen kokonaisluvun välillä [*alkuarvo*, *loppuarvo*]. Tulostamiseen kannattaa käyttää funktiota `disp`.

**130.** mlP016.tex
Avaa Matlabin`FILE`-valikosta uusi m-tiedosto ja valitse “skripti”. Talleta nimelle `cossinplot.m`.
Kirjoita/kopioi tiedostoon täällä oleva teksti
`http://www.cs.cornell.edu/cv/Books/SCMV/Mfiles/chap1.htm#SinePlot`
Voit kopioida sen myös tästä:

```
%% Script File: SinePlot
% Displays increasingly smooth plots of sin(2*pi*x).
close all   % Suljetaan mahd. avatut grafiikkaikkunat.
for n = [4 8 12 16 20 50 100 200 400]
   x = linspace(0,1,n);
   y = sin(2*pi*x);
   plot(x,y)
   title(sprintf('Plot of sin(2*pi*x) based upon n = %3.0f points.',n))
   pause(1)
end
```

Suorita komennot

- copy/paste:lla istuntoon tai
- editorin vihreällä nuolella tai F5:llä tai CTR-ENTER tai
- kirjoittamalla Matlab-istuntoon tiedoston nimi: `cossinplot`

Muuta pause-komento muotoon `pause()`, jolloin komentojono jää odottamaan ENTER-painallusta. Voit kirjoittaa ennen `pause`- komentoa kehoituksen tyyliin `disp('Paina ENTER:iä jatkaaksesi')`. Samalla voit editoida n-vektoria loppupäästä lyhyemmäksi.

Näin pääset hallitummin katsomaan tilannetta.

**Ratkaisu:** Ei tarvita.

**Avainsanat:** Skripti, komentotiedosto, kuva, piirto

**131.** mlP017.tex

Vahvista numeerisesti uskoasi matemaattiseen totuuten siitä, että summa

$$p(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{16^k} \left( \frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

suppenee kohti arvoa $\pi$ kun $n \to \infty$.

**Vihje:** a) Käytä `for`-luuppia, jossa kasvatat iteraatioiden ylärajaa suureksi. Suppeneminen on suhteellisen nopeaa, joten ylärajan ei tarvitse olla kovin iso.

b) Voit suoritta tehtävän myös (ja mieluiten) vektoroidusti muodostamalla jonot kaksoispiste (:) - operaattorilla, aritmetiikan pisteittäin (.) ja soveltamalla `sum`-funktiota tai vielä paremmin `cumsum`:ia, jolla saat koko osasummien jonon.

Kirjoita skriptiksi, jossa voit vaihdella parametria n, tottakai!

**132.** mlP018.tex
Huom: Tehtävä on varsin tarkkaan neuvottu. Pituus ei merkitse vaikeutta.

Tutkitaan heitetyn pallon lentorataa MATLABilla. Aloita luomalla m-tiedosto johon kirjoitat tarvittavat komennot.

1. Teemme seuraavat lähtöoletukset:

   i Pallon korkeus $h$ heittohetkellä on $1.5m$

   ii Putoamiskiihtyvyys $g$ on $9.8m/s^2$

   iii Pallon vauhti $v$ heittohetkellä on $4m/s$

   iv Pallon etenemisvektorin suunta $\theta$ on $45^o$

   Kirjoita oletukset skriptiisi.

2. Luo vektori `t`, jossa on 1000 tasaisin välein valittua arvoa väliltä $[0, 1]$.

3. Kuvataan muuttujalla $x$ pallon etäisyyttä heittäjästä (mitattuna maan pinnalla) ja muuttujalla $y$ pallon korkeutta, seuraavat yhtälöt kuvaavat muuttujien riippuvuutta ajasta ja oletetuista parametreista.

   (a)
   $$x(t) = v \cos\left(\theta \frac{\pi}{180}\right) t. \text{Muunnetaan kulma radiaaneiksi}$$

   (b)
   $$y(t) = h + v \sin\left(\theta \frac{\pi}{180}\right) t - \frac{1}{2} g t^2.$$

   Kirjoita annettujen yhtälöiden ja määrittelemiesi arvojen avulla vektorit `x` ja `y`.

4. Arvioidaan hetkeä jolloin pallo putoaa maahan, ja sen lentämää matkaa: etsi ensimmäinen indeksi, jolla pallon korkeus $y$ muuttuu negatiiviseksi (käytä funktiota `find`). Pallon lentämä etäisyys on vektorin $x$ arvo tässä indeksissä, lentoaika on vektorin $t$ arvo tässä indeksissä. Tulosta sekä lentomatka että -aika näkyviin ruudulle.

5. Piirretään pallon lentorata: piirrä kuva, jossa pisteiden x-koordinaatit ovat vektorissa $x$, ja y-koordinaatit vektorissa $y$. Tämän jälkeen piirrä nolla-taso näkyviin katkoviivalla.

**Vihje:**

**133.** mlP019.tex

Olkoon

$$g(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ x, x > 0 \end{cases}$$

Määrittele funktio g Matlab-funktioksi (m-tiedostoon).

**Vihje:** Voit käyttää funktioita `zeros` ja `max` .

Ehkä vieläkin elegantimmin näin:
Mieti, millä saat aikaan yksikköaskelfunktion (Heavisiden funktion), joka saa negatiivisilla arvon 0 ja positiivisilla 1. (Tähän riittää 3 merkkiä.) Sillä kerrot funktion $y = x$.

**Ratkaisu:** mlP019R.m
(pdf puuttuu, tuskin tarpeen)

**Avainsanat:** Matlabperusteet, ramppifunktio, paloittain määrittely, zeros, max, "vielä elegantimpi"

**134.** mlP020.tex
(Maple ja Matlab)

Määritä seuraavat summat:

$$\sum_{k=1}^{1000} k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

**Vihje:** Maple: Kokeile edelliseen sekä `sum` että `add` - komentoja, jälkimmäiseen vain `sum`.

Matlab: Muodosta vektori `1,2,...1000` ja sitten vain `sum`. Jälkimmäisessä voit laskea muutamalla, toinen toistaan suuremmalla arvolla. (Numeerisesti et tietenkään voi summata äärettömyyksiin.)

**135.** mlP021.tex

Esitä yhden rivin Matlab-komento, jolla saat selville vektorin tai matriisin niiden alkioiden lukumäärän, jotka ovat $> 5$.

Testaa ainakin näille:

a) `A=1:10`

b) `B=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]`

c) `C=10*rand(6,6)`

d) `D=ones(4,4)`

---

## matlabteht/mlTodari, Todennäköisyys, satunnaisuus, tilasto

---

**136.** mlT004.tex

Laskemme yksikkökolmion $T$ (virittävät pisteet $(0,0),(1,0),(0,1)$) pinta-alan tasaisesti jakautuneilla satunnaisluvuilla Monte-Carlo menetelmää mukaillen:

1. Generoi $N$ tasaisesti jakautunutta satunnaislukuparia $(x_1, x_2)$ yksikköneliöön.
2. Selvitä, kuinka moni valitsemistasi satunnaispisteistä osuu kolmion $T$ sisälle. Havainnollista tätä piirtämällä $T$:n sisälle osuvat pisteet ja $T$:n ulkopuoliset pisteet samaan kuvaan eri väreillä.
3. Approksimoi $T$:n alaa laskemalla kolmion sisälle osuneiden pisteiden osuus kaikista valituista. Kokeile menetelmän tarkkuutta eri arvoilla $N$.

**Vihje:** Funktion `rand` generoi tasaisesti jakautuneita satunnaislukuja.

On useita keinoja tutkia, osuuko piste kolmion sisään.

1. Voit kirjoittaa tarkistuksen silmukkaan, ja tehdä päätöksen kontrollirakenteilla. Vähiten suositeltava tapa (mutta opettaa kuitenkin ohjausrakenteita, selkeästi Matlabin "väärinkäyttöä").
2. Muodosta saunnaisvektorille ehto kolmioon kuulumiselle ja käytä loogista indeksointia. Oikeaoppinen Matlab-tyyli (tehokas sekä ajatuksellisesti että suoritusajassa).
3. Funktio `inpolygon`, joka on huomattavan monipuolinen funktio. Yleistyskelpoinen erilaisille monikulmioalueille. Kuuluu pikemminkin luokkaan "hyvä tietää" kuin tässä tarkoitettuun Matlab-perusoppiin. Mutta on mielenkiintoinen ja kokeilemisen arvoinen tässäkin yhteydessä.

Pisteitä piirretään `plot`-komennolla optioita hyväksikäyttäen: esimerkiksi `plot([3 2],[4 1],'.r')` piirtää pisteet $(3,4),(2,1)$ punaisina pisteinä.

**Avainsanat:** mlTodari, mlPerusteet, matlabperusteet, Monte Carlo, looginen ineksinti, satunnaisluvut

**137.** mlT005.tex
(Osa kaavoista epäselviä html:ssä, katso pdf-tehtäviä!)
Monte Carlo-approksimaatio $\pi$:lle.

Piirrä kuva

```
t=linspace(0,2*pi);
x=cos(t);y=sin(t);
plot(x,y,[1 1 -1 -1 1],[-1 1 1 -1 -1]);
axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
axis square
```

Heitetään tikkaa kuvan mukaiseen tauluun (tikat eivät eksy taulua ympäröivään neliön ulkopuolelle, ehkä tähän oikeasti tarvitaan "satunnaisrobotti"). Jos tikkojen osumatarkuus on satunnaismuuttuja, joka on tasajakautunut neliöllä
$-1 < x <, 1 < y < 1$, niin ympyrään ja neliöön osuneiden tikkojen lukumäärän suhde lähenee lukua $\pi/4$, kun satunnaisheittojen lukumäärä kasvaa. Miksi? Generoi tasajakautuneita pistepareja ja laske ko. osuus.

Alla on vihjettä pikku esitystä varten. Toisaalta tehtävä ei kaipaa mitään lisäopiskelua, tai vihjeitä. Kenties ehto `X.^2+Y.^2 <= 1` ja bittivektorin ykkösten lukumäärän laskeminen vähemmän Matlabia osaaville. (Vrt. edellinen kolmiotehtävä mlT004.tex.)

**Vihje:** Kirjassa C.vanL on hyvä tiivis selvitys aiheesta "Random processes"1.3.2 ss. 34 - 37. Tästä aiheesta voisi tehdä pienen harjoitustyön.

Esiintyviä Matlab-funktioita:

```
http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/ref/hist.shtml
http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/ref/rand.shtml
http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/ref/randn.shtml.
```

Satunnaisprosesseihin ja tähän tehtävään (Monte Carlo simulaatio $\pi$:n laskemiseksi) on CV-sivulla selkeät skriptit:

`http://www.cs.cornell.edu/cv/Books/SCMV/Mfiles/chap1.htm#Dice`

Dice ja Darts ala C. van Loan. Opiskele, kokeile ja esittele.

**Avainsanat:** mlTodari, mlPerusteet, matlabperusteet, Monte Carlo, looginen ineksinti, satunnaisluvut

**138.** Olkoot $F^n$ satunnaismuuttuja joka kuvaa kiinteiden pisteiden lukumäärää satunnaispermutaatiossa (so. alkiot joiden paikka ei muutu permutaatiossa).

a) kirjoita funktio joka ottaa argumenttina kokonaisluvun $n$ ja palautaa $k$-pituisen otoksen jakaumasta $F^n$.

b) Generoi otoksia jakaumasta $F^n$ eri arvoilla $n$.

c) Piirrä histogrammit eri otoksista.

d) Voidaanko histogrammien perusteella päätellä, mikä on $E[F^n]$?

e) Laske $E[F^n]$

**Vihje:** Käytä hyväksesi odotusarvon lineaarisuutta laskiessasi odotusarvoa $E[F^n]$.

## mlVektori

**139.** Muista, että Jacobin matriisi koostuu vektori- tai skalaariarvoisen funktion $F$ ensimmäisistä osittaisderivaatoista:

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Kuinka laskisit numeerisen Jacobin matriisin?

**Vihje:** Muista, että numeerisesti

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

**140.** Harjoitellaan usean muuttujan funktioiden piirtämistä. MATLABissa tämä tehdään määrittelemällä ensin piirtoalueen peittävä diskretointi, tai hila. Tämä määritellään komennolla `meshgrid`. Luodaan esimerkiksi suorakulmion $[1,2]\times[3,4]$ peittävä hila:

```
t1 = 1:0.2:2;t2 = 3:0.2:4;
[x y] = meshgrid(t1,t2);
```

Nyt muuttujissa `x` ja `y` ovat hilapisteiden $x-$ ja $y$-koordinaatit. Niillä voidaan suorittaa laskutoimituksia kuten tavallisillakin muuttujilla; on vain pidettävä mielessä että kyseessä ovat nyt matriisit, eli yleensä haluamme valita alkioittaiset operaatiot matriisioperaatioiden sijaan.

Pintojen piirtäminen tapahtuu komennoilla `surf` ja `mesh`. Lasketaan ja piirretään funktion

$$f(x,y) = x * y^2$$

kuva:

```
z = x.*y;
% Huomaa alkoittainen kertolasku
surf(x,y,z);
```

.

Piirrä näillä keinoin seuraavien funktioiden kuvat

- $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ alueessa $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\times[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

- $f(x,y) = x^3 - 3xy$ alueessa $[-1,1]\times[-1,1]$.

Toinen yleinen tapa kuvata usean muuttujan funktioita on käyttää tasa-arvokäyriä. Näitä piirretään komennolla `contour`, syntaksi on sama kuin tavallisilla piirtokomennoilla. Kokeile piirtää myös edellisten funktioden tasa-arvokäyrät.

**141.** Vektorianalyysissä on todistettu että funktion tasarvo-käyrä on aina gradientin normaali. Tutkitaan tätä nyt käytännössä. Piirrä funktiolle

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

tasa-arvokäyrät haluamassasi hilassa käyttäen komentoa `contour` (komennon syntaksi on sama kuin tavallisten piirtokomentojen). Tämän jälkeen laske funktion numeerinen gradientti tässä hilassa funktiolla `gradient`. Funktio palauttaa tässä tapauksessa kaksi matriisia, joissa on pisteittäiset numeeriset estimaatit arvoille

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ ja } \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Gradientit kannattaa piirtää vektorikenttänä, MATLABin tapauksessa komennolla `quiver`. Esimerkiksi, jos halutut osittaisderivaatat ovat matriiseissa `dx` ja `dy` niin piirto tapahtuisi komennolla `quiver(x,y,dx,dy)`. Lopuksi piirrä kuvat näkyviin päällekäin komentamalla:

```
contour(x,y,z)
hold on
quiver(x,y,dx,dy)
```

Tutki kuvasta, ovatko gradienttinuolet suorassa kulmassa tasa-arvokäyriä vastaan.

**142.** Funktio

```
function Jf = numjaco(F,m,x,n)
% f is a function with m components,
% x is a vector with n components,
% the result is an m by n matrix.
Jf = ones(m,n);   h = 1e-4;
f = fcnchk(F);
for j =1:n
    e = zeros(n,1); e(j) = 1;
    Jf(:,j) = (f(x+h*e)-f(x-h*e) )/(2*h);
end;
```

laskee vektorikentän $F$ numeerisen Jacobin matriisin, olettaen että käytetty kanta on standardi. Jos vektorikentässä on vain yksi komponentti, kyseessä on kyseisen funktion gradienttivektori.

Kopioi edellä oleva funktio tiedostoon, ja määrittele funktiot

- $f(x, y) = x^2 y$
- $g(x, y) = xe^{x^2+y}$

ja laske niiden numeeriset gradientit pisteissä $(1, 2)$ ja $(2, -4)$. Vertaa tulosta tarkkoihin arvoihin:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 \end{bmatrix} \nabla g = \begin{bmatrix} e^{x^2+y} + 2x^2 e^{x^2+y} \\ xe^{x^2+y} \end{bmatrix}$$

**143.** Piirrä funktion $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ määrittelemä pinta $(x, y)$-tason neliön $[-2, 2] \times [-2, 2]$ alueella. Laske tämän funktion integraali yli kyseisen neliön. Kyseisen integraalin arvo koko tason ylitse on $\pi$.

**Vihje:** Pinnan piirtämiseen tarvitset sopivan alueen peittävän hilapisteistön. Näitä luodaan MATLABissa komennolla `meshgrid`, katso `help meshgrid`. Pinta piirretään komennolla `mesh` tai `surf`, katso dokumentaatiota.

Integraalin laskemiseen kannattaa käyttää funktiota `dblquad`. Katso kutsumisohjeet dokumentaatiosta. `dblquad`in ensimmäisen argumentin tulee olla funktio: tässä kannattaa käyttää MATLABin anonyymifunktioita. Esimerkiksi $\int_0^3 \int_2^3 xy\, dx\, dy$ = `dblquad(@(x,y)x.*y,2,3,0,1)`. Jälleen kerran, tutki dokumentaatiota `function_handle`.

**144.** Laske funktion $f(x, y) = 3 + \cos(x) + \cos(y)$ määräämän pinnan ja suorakulmion $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ väliin jäävä tilavuus. Piirrä havainnollistava kuva.

**Vihje:** Tilavuuteen tarvitset kaksinkertaista integraalia `dblquad`, pinta piirretään komennoilla `meshgrid` ja `mesh`.

**145.** Piirrä funktion $f(x,y) = y^2 - x^2$ tasa-arvokäyrät ja gradienttivektorikenttä, ja totea, että gradientti on aina kohtisuorassa tasa-arvokäyrää vasten.

**Vihje:** Laske gradientti funktiolla `gradient`, ja piirrä tasa-arvokäyrät komennolla `contour`. Gradienttivektorikentän saat piirrettyä komennolla `quiver`.

**146.** Määritä pinnan $z = -x^2 - y^2$ normaalivektori, ja piirrä sen vektorikenttä samaan kuvaan pinnan kanssa.

**Vihje:** Aloita määrittelemällä jokin tason suorakulmio funtion `meshgrid` avulla - tämän jälkeen voit määritellä pinnan, eli matriisin $z$. Pinnan normaalivektorin saat laskettua funktiolla `surfnorm`. Piirrä ensiksi pinta komennolla `surf(x,y,z)`, sen jälkee kirjoita `hold on`, jonka jälkeen kirjota `quiver3(x,y,z,u,v,w)`, missä $u, v$ ja $w$ ovat `surfnorm`in palauttamat matriisit.

## mmaAritmetiikka

**147.** Strategiapelissä rakennetaan uudelle planeetalle makean veden säiliötä. Säiliö on ympyräpohjainen lieriö, jonka korkeus on 320 metriä ja pohjan säde 1000 metriä. Säiliöstä haihtuu vettä keskimäärin 100 litraa minuutissa. Kuinka monta planeetan vuotta säiliössä riittäisi vettä, ennen kuin täysi säiliö pelkästään haihtumisen vuoksi olisi tyhjentynyt? Planeetan vuosi on $3 \cdot 10^7$ sekuntia.

**Vihje:** Kertomerkki on joko välilyönti tai *; numeroiden tapauksessa * on selkeämpi (ihmiselle).

**148.** Trooppisen vuoden pituus on 365 vrk 5 h 48 min 45 s ja Maan pyörähdysaika akselin ympäri 23 h 56 min 4 s. Ilmoita murtolukuna, kuinka monta pyörähdystä Maa tekee trooppisessa vuodessa. Mikä tulos on desimaalilukuna?

**Vihje:** Kertomerkki on joko välilyönti tai *; numeroiden tapauksessa * on selkeämpi (ihmiselle).

**149.** Sievennä lauseke $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$. Laske myös likiarvo 100 desimaalilla.

**Vihje:** Kokeile funktioita `Simplify` ja `FullSimplify`. Neliöjuurifunktio on `Sqrt`; symboli löytyy myös paletista. Likiarvon laskeminen: `N`.

**150.** Laske summat $\sum_{k=1}^{n} k^2$, kun $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Jaa tulokset tekijöihin. Ovatko jotkin summat jaottomia, so. alkutekijöitä?

**Vihje:** Tarvittavia funktioita: `Sum`, `FactorInteger`, `PrimeQ`. Taulukoita voi tehdä funktiolla `Table`. Liittämällä loppuun määre `//TableForm` taulukko saadaan tulostetuksi havainnollisempaan muotoon.

**151.** Tutki, millaisia tarkkoja arvoja saadaan lausekkeelle $\sin(\pi/n)$, kun $n$ on luonnollinen luku. Mitä tarkoittaa, että osa tuloksista on (ainakin näennäisesti) kompleksilukuja? Missä tapauksissa tulos ei sisällä imaginaariyksikköä?

**Vihje:** Tarvittava funktio on `FunctionExpand`. Muista iso alkukirjain ja hakasulut: `Sin[Pi/n]`.

**152.** Laadi taulukko sini- ja kosinifunktioiden arvoista välillä $0° - 90°$ yhden asteen välein.

**Vihje:** Taulukoita voi tehdä funktiolla `Table`. Liittämällä loppuun määre `//TableForm` taulukko saadaan tulostetuksi havainnollisempaan muotoon. Trigonometristen funktioiden argumenttien tulee olla radiaaneissa. Luku $\pi$ kirjoitetaan `Pi`; se voidaan myös valita paletista. Muista iso alkukirjain ja hakasulut: `Sin[Pi/4]`, `Cos[0]`. Katso dokumentaatiosta: `Degree`.

**153.** Lukua $\pi$ approksimoidaan luvulla $\sqrt{10}$. Laske absoluuttinen virhe ja suhteellinen virhe prosenteissa.

**Vihje:** Luku $\pi$ on `Pi` ja $\sqrt{10}$ ilmaistaan `Sqrt[10]`. Molemmissa tapauksissa voidaan symbolit valita myös paletista.

**154.** *Stirlingin kaavan* mukaan on

$$\ln n! \approx (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi}.$$

Approksimointi on sitä tarkempi, mitä suurempi $n$ on. Laske absoluuttinen ja suhteellinen approksimaatiovirhe, kun $n = 10,\ 100,\ 1000$.

**Vihje:** Muodosta lausekkeet absoluuttiselle ja suhteelliselle virheelle $n$:n funktiona ja sijoita näihin tarvittavat $n$:n arvot korvaussääntöä käyttäen.

**155.** Laske lausekkeen $(1 + \frac{1}{n})^n$ likiarvo yhä isommilla arvoilla $n$ ja tutki, miten tämä lähestyy Neperin lukua $e$.

**Vihje:** Likiarvot halutulla tarkkuudella saadaan funktiolla `N`. Neperin luku on `E`; se voidaan valita myös paletista, jolloin symboli näyttää hieman erikoiselta pikku e:ltä. Aloita varovaisesti; älä syötä kovin suuria lukuja $n$. Tulokset voi kerätä taulukoksi `Table`-funktiolla.

**156.** Laske summan $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k / k!$ likiarvo yhä isommilla arvoilla $n$ ja tutki, miten summan käänteisarvo lähestyy Neperin lukua $e$.

**Vihje:** Tarvittavia funktioita: `Sum`, `N`. Neperin luku on `E`; se voidaan valita myös paletista, jolloin symboli näyttää hieman erikoiselta pikku e:ltä. Kertoma ilmaistaan yksinkertaisesti huutomerkillä. Tulokset voi kerätä taulukoksi `Table`-funktiolla.

**157.** Kahden paikkakunnan välinen lyhin etäisyys maapallon pintaa pitkin mitattuna voidaan laskea kaavasta

$$d = R \arccos(\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

missä $\vartheta_1$ ja $\varphi_1$ tarkoittavat ensimmäisen, $\vartheta_2$ ja $\varphi_2$ vastaavasti toisen paikan leveys- ja pituusatetta. $R = 6370$ km on maapallon säde. Muodosta funktio, jolla voidaan laskea kahden paikkakunnan etäisyys antamalla argumenteiksi paikkojen koordinaatit. Laske a) Helsingin ja Tokion, b) Reykjavikin ja Sydneyn välinen etäisyys, kun paikkakuntien koordinaatit ovat seuraavat:

| | leveys | | pituus | |
|---|---|---|---|---|
| Helsinki | 60° 08’ | N | 25° 00’ | E |
| Tokio | 35° 40’ | N | 139° 45’ | E |
| Reykjavik | 64° 09’ | N | 21° 58’ | W |
| Sydney | 33° 55’ | S | 151° 10’ | E |

**Vihje:** Muodosta funktio siten, että argumentit annetaan asteissa. Arkuskosini on `ArcCos`. Aste on `Degree`; katso tarkemmat tiedot dokumentaatiosta.

## mmaDifferentiaaliyhtälöt

**158.** Osoita, että polynomit $x^2 + x$ ja $x^2 + 1$ toteuttavat differentiaaliyhtälön $(x^2 - 2x - 1)y'' - 2(x - 1)y' + 2y = 0$.

**Vihje:** Talleta differentiaaliyhtälö Mathematican muistiin siten, että funktion $y$ argumentit ovat paikoillaan: `y"[x]` jne. Määrittele vuorollaan kumpikin polynomi Mathematican funktioksi (`p[x_]:= ...`) ja sijoita tämä yhtälöön: (`yhtalo/.y->p`). Sievennä tarvittaessa.

**159.** Osoita, että funktio

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \cos x \ln \left| \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \right|$$

toteuttaa differentiaaliyhtälön $y'' + y = \tan x$. Luvut $C_1$ ja $C_2$ ovat vakioita.

**Vihje:** Joko: Muodosta funktion $y$ ja erikseen lasketun toisen derivaatan summa ja sievennä tämä. Tai: Määrittele $y$ Mathematican funktioksi ja sievennä `y"[x] + y[x]`. Logaritmifunktio on `Log`. Itseisarvot voidaan jättää huomiotta, sillä Mathematica tuntee logaritmifunktion $\ln x$ myös negatiivisilla argumenteilla $x$, jolloin se eroaa funktiosta $\ln|x|$ vain kompleksisella vakiolla $i\pi$. Kokeile: `FullSimplify[ComplexExpand[Log[-x]], x > 0]`.

**160.** Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'' + y = x^2$. Etsi myös alkuehtoa $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ vastaava yksittäisratkaisu.

**Vihje:** Käytä komentoa `DSolve`, jonka avulla voidaan löytää sekä yleinen ratkaisu että yksittäisratkaisu.

**161.** Etsi yleinen ratkaisu Airyn differentiaaliyhtälölle $y'' - xy = 0$. Mitä ratkaisussa esiintyvät funktiot ovat?

**Vihje:** Käytä komentoa `DSolve`. Ratkaisu ei ole lausuttavissa tavallisten alkeisfunktioiden avulla, mutta kylläkin Mathematican tuntemien funktioiden avulla.

**162.** Kesätapahtumassa hyttysten määrä oli tilaisuuden alussa 200 ja kolme tuntia myöhemmin 700. Määrän kasvunopeus hetkellä $t$ oli suoraan verrannollinen hyttysten määrään sinä hetkenä. Muodosta hyttysten määrää kuvaava differentiaaliyhtälö ja sen ratkaisuna hyttysten määrä mielivaltaisella hetkellä $t$. Mikä oli hyttysten määrä viiden tunnin kuluttua tilaisuuden alkamisesta?

**Vihje:** Käytä funktioita `DSolve` ja `Solve`. Kumpikin antaa ratkaisun korvaussäännön muodossa. Ratkaisu voidaan tallettaa muuttujaksi jatkokäsittelyä varten korvausoperaattorilla, esimerkiksi `lukum= y[t]/.ratkaisu`.

**163.** Lohenviljelyaltaaseen, jossa oli 1100 kalaa, levisi kalatauti. Taudin vaikutuksesta kalamäärä alkoi vähetä yhtälön

$$P'(t) = -4\sqrt{P(t)}$$

mukaisesti. Tässä $P(t)$ on kalamäärä hetkellä $t$, ja aika $t$ on mitattu viikkoina. Kuinka monen viikon kuluttua kaikki kalat olivat kuolleet?

**Vihje:** Käytä funktioita `DSolve` ja `Solve`. Kumpikin antaa ratkaisun korvaussäännön muodossa. Ratkaisu voidaan tallettaa muuttujaksi jatkokäsittelyä varten korvausoperaattorilla, esimerkiksi `lukum= y[t]/.ratkaisu`.

## Differentiaali- ja integraalilaskenta

**164.** Laske integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{13 - 12\cos 2x}\,dx$$

a) symbolisesti, b) numeerisesti. Piirrä integroitavan funktion kuvaaja. Mikä itse asiassa on integraalin arvo?

**Vihje:** Symbolinen integrointi tapahtuu funktiolla `Integrate`, numeerinen funktiolla `NIntegrate`. Jälkimmäisessä sovelletaan suoraan jotakin numeerisen integroinnin menetelmää, jonka valintaan myös käyttäjä voi vaikuttaa. Ks. dokumentaatiota, erityisesti Implementation Notes.

**165.** Määritä funktion

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x}$$

integraalifunktio ja piirrä sen kuvaaja. Onko tämä jatkuva? Pitäisikö sen olla jatkuva? Laske funktion integraali jakson $[0, 2\pi]$ yli a) integroimalla analyyttisesti komennolla `Integrate`, b) integroimalla numeerisesti komennolla `NIntegrate`, c) muodostamalla ensin integraalifunktio komennolla `Integrate` ja sijoittamalla rajat tähän korvausoperaattoria käyttäen.

**Vihje:** Komennolla `Integrate` lasketaan sekä integraalifunktio että määrätty integraali. Numeeriselle integroinnille (määrätyn integraalin laskemiseen) on komento `NIntegrate`. Korvausoperaattori on `ReplaceAll` eli `/.` .

**166.** Määritä funktion $f(x) = x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 7x - 10$ nollakohdat, ääriarvopisteet ja käännepisteet. Piirrä kuvaaja.

**Vihje:** Talleta aluksi funktion lauseke jollakin nimellä, jotta siihen viittaaminen myöhemmin on helppoa. Tarvittavia funktioita: `D`; `Solve`, `NSolve`. Arvojen sijoittaminen johonkin lausekkeeseen tapahtuu korvausoperaattorilla `/.` eli `ReplaceAll`. Mikäli saadut numeeriset lausekkeet näyttävät hankalilta, ne voi hahmottaa paremmin laskemalla likiarvot funktiolla `N`. Myös funktiosta `Chop` saattaa olla iloa; ks. dokumentaatiota.

**167.** Määritä funktion $f(x) = 2x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 41x - 3$ reaaliset nollakohdat, ääriarvokohdat ja ääriarvot sekä käännepisteet.

**Vihje:** Piirrä kuvio. Ovatko tarkat arvot löydettävissä?

**168.** Määritä funktion $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1 - x^2})$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 1]$.

**Vihje:** arcsin on Mathematicassa `ArcSin`. Piirrä myös kuvio.

**169.** Laske funktion funktion $f(x) = 2x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 41x - 3$ kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala.

**Vihje:** Piirrä kuvio. Siirry tarvittaessa numeeriseen laskentaan.

**170.** Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrät $y = x^2 - 3$ ja $y = \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$.

**Vihje:** Siirry tarvittaessa numeeriseen laskentaan.

**171. Ohjelmat**:
Maple,Mathematica

(Kurssi: 2012 kevät H/H2T2.tex)

Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrät $y^2 = x$ ja $x - y = 3$.

**Vihje:** Mieti, kumpi on helpompaa: integrointi x- vai y-suunnassa.

**Ratkaisu:** mplDi02.pdf (pdf-tiedosto),
mplDi02.mw (Maple ws)
mmaDi107R.nb (Mma-notebook)
**Luokittelu**:
`mplteht/mplDiffint/mplDi02.tex`, `mmateht/mmaDiffint/mmaDi107.tex`
**Avainsanat:**
Pinta-ala, integraali,diffint perusteet.

**172.** Laske käyrien $y = x^3 - 3x$ ja $y = -x^3 + x$ rajoittaman kaksiosaisen alueen pinta-ala.

**Vihje:** Piirrä kuvio. Määritä integroimisrajat. Varsinainen integrointi voidaan tehdä monella eri tavalla: integroimalla symbolisesti tai numeerisesti, integroimalla funktioiden erotuksia tai erotuksen itseisarvoa.

**173.** Käyrä $y = \sin^2 x$, $x \in [0, \pi]$, pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus ja pinnan ala. Parametrisoi pinta ja piirrä se.

**Vihje:** Valitse parametrisoinnissa toiseksi parametriksi $x$ ja toiseksi pyörähdyskulma. Piirtäminen funktiolla `ParametricPlot3D`. Muista: `Sin[x]^2` jne.

**174.** Paraabelin $y = -4x^2 + 40x - 97$ ja x-akselin rajoittama alue pyörähtää y-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

**Vihje:** Kappaleen voi ajatella muodostuvan joko vaakasuorista tasoleikkauksista tai lieriöpinnoista, joiden akselina on y-akseli. Nämä johtavat kahteen erilaiseen integraaliin, jotka luonnollisestikin antavat saman tuloksen.

**175.** Laske sen pyörähdyskappaleen tilavuus, joka syntyy käyrän $y = x^3 + 1$, $x$-akselin sekä suorien $x = 3$ ja $y = 9$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $x = 3$ ympäri.

**Vihje:** Periaatteessa yksinkertainen integrointi, mutta tutki tarkoin, mitä funktiota on integroitava.

**176.** Puutarhuri viljelee tomaatteja, joiden muoto määräytyy kardioidin $r = a(1 + \cos\varphi)$ pyörähtämisestä x-akselin ympäri. Piirrä kardioidi. Laske tomaatin tilavuus. Tuntuuko saamasi tilavuus uskottavalta? Anna vakiolle $a$ jokin lukuarvo ja laske vastaava tilavuuden likiarvo. Piirrä kuvio tomaatista.

**Vihje:** Valitse kardioidin parametrisoinnissa napakulma $\varphi$ parametriksi, lausu $x$ ja $y$ tämän avulla ja käytä funktiota `ParametricPlot`. Vaihtoehtona on käyttää funktiota `PolarPlot`. Tomaattipinnan parametrisoinnissa ota parametreiksi napakulma $\varphi$ ja pyörähdyskulma x-akselin ympäri. Piirtäminen tapahtuu funktiolla `ParametricPlot3D`. Tilavuus saadaan periaatteessa integraalista $\int y^2\,dx$, johon on tehtävä sellaiset sijoitukset, että muuttujaksi saadaan napakulma $\varphi$.

**177.** Laske kardioidin $r = 1 + \cos\varphi$ kaarenpituus. Piirrä kuvio. Miten saat kardioidin kuvan oikeanmuotoiseksi? Tuntuuko saamasi pituus uskottavalta?

**Vihje:** Kaarenpituusintegraali: $\int ds = \int \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2}\,d\varphi$.

**178.** Piirrä avaruuskäyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\cos t}{t}\,\mathbf{i} + \frac{\sin t}{t}\,\mathbf{j} + \arctan t\,\mathbf{k},$$

kun $t \in [1, T]$ ja $T = 100$. Määritä käyrän kaarenpituus ja tutki, onko sillä raja-arvoa, kun $T \to \infty$.

**Vihje:** Käyrä on luontevinta kirjoittaa vektoriksi `r = {Cos[t]/t,Sin[t]/t,ArcTan[t]}` ja laskea kaarenpituus integraalista $\int |\mathbf{r}'(t)|\,dt$.

**179.** Astia on kärjellään seisova avonainen ympyräkartio. Kartion pohjan säde on 6,6 cm ja sivujana 11,0 cm. Astia on täynnä vettä. Astiaan asetetaan pallo, joka sivuaa kartion vaippaa. Määritä pallon säde siten, että astiasta valuva vesimäärä on mahdollisimman suuri.

**Vihje:** Laskusta tulee selkeämpi, jos se lasketaan symboleja käyttäen ja vasta lopuksi asetetaan näille arvot. Arvojen sijoittamiseksi on luontevaa määritellä korvaussääntö `{r->6.6, s->11.0, h->Sqrt[11.0^2-6.6^2]}`, jolloin arvot voidaan helposti sijoittaa mihin tahansa välitulokseenkin ja tämän jälkeen jatkaa laskua symboleilla.

**180.** $R$-säteisen pallon ympäri asetetaan mahdollisimman pieni neliöpohjainen suora pyramidi siten, että pallo sivuaa pyramidin pohjaa ja sivutahkoja. Laske pallon tilavuuden suhde pyramidin tilavuuteen.

**Vihje:** Lausu pyramidin tilavuus sopivan muuttujan avulla. Tätä varten tarvitaan sopivien kolmioiden yhdenmuotoisuutta. Hyödynnä Mathematican komentoja, jotta et joudu syöttämään käsin aiempien laskujen tuloksia!

**181.** Osoita, että käyrän $y = e^{-x} \sin x$ ja $x$-akselin alueessa $x \geq 0$ rajoittamien alueiden $A_0$, $A_1$, $A_2$, ... pinta-alat muodostavat geometrisen jonon. Laske integraali $\int_0^\infty |e^{-x} \sin x| \, dx$.

**Vihje:** Määrittele alueen $A_n$ pinta-ala funktioksi: `a[n_]:=`... ja sievennä (`Simplify`, `FullSimplify`) peräkkäisten alojen suhteen lauseke. Funktiolla `Sum` voi laskea myös äärettömän monen termin summia.

**182.** Suorakulmaisen kolmion kaikki kärjet sijaitsevat paraabelilla $y = ax^2$. Suoran kulman kärkeen asetetaan paraabelin normaali. Osoita, että kolmion hypotenuusa leikkaa normaalin samassa pisteessä riippumatta kolmion kahden muun kärjen sijainnista. Määritä leikkauspiste.

**Vihje:** Esimerkiksi: Laske leikkauspiste, kun suoran kulman kärjen x-koordinaatti on $t$ ja toisen kateetin kulmakerroin on $k$.

**183.** Pallon muotoiseen nestesäiliöön, jonka säde on yksi metri, pumpataan nestettä nopeudella 10 litraa sekunnissa. Piirrä kuvaaja, joka esittää nestepinnan korkeutta säiliössä ajan funktiona. Kuinka kauan säiliön täyttäminen kestää? Piirrä nestepinnan korkeuden nousunopeuden kuvaaja.

**Vihje:** Ratkaise nestepinnan korkeus nestetilavuuden funktiona ja valitse saaduista ratkaisuista oikea. Lauseke on hankala, mutta Mathematica pystyy kuitenkin käsittelemään sitä.

**184.** Muodosta kuusi satunnaislukua, jotka ovat peräisin välien $[-5, -3]$, $[-2, -1]$, $[1, 2]$, $[3, 5]$, $[-0.5, 0.5]$ ja $[1, 2]$ tasaisesta jakaumasta. Näistä neljä ensimmäistä olkoot neljännen asteen polynomin nollakohdat, kaksi viimeistä määrittävät pisteen, jonka kautta polynomin kuvaaja kulkee. Suurimman ja pienimmän nollakohdan välisellä alueella polynomin kuvaaja pyörähtää x-akselin ympäri ja muodostaa pyörähdyskappaleen. Laske tämän tilavuus ja pinta-ala; piirrä kuvio.

**Vihje:** Satunnaislukuja generoidaan funktiolla `RandomReal`, jolle voidaan antaa argumentiksi mm. väli, jolta lukuja halutaan.

**185.** Derivoi funktiot $x^n$, $x^x$, $\sin^4 x + \cos^4 x$. Integroi saamasi tulokset. Päädytäänkö takaisin samaan funktioon, josta lähdettiin?

**Vihje:** Huomaa merkintä: `Sin[x]^4` etc. Kahden lausekkeen samuutta voi tutkia tarkastelemalla niiden erotusta. Tämän vertaaminen nollaan on yleensä helpompaa kuin kahden monimutkaisen lausekkeen vertaaminen toisiinsa. Toisena vaihtoehtona on tarkastella lausekkeiden kuvaajia.

**186.** Laske funktion $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ kahdeskymmenes derivaatta ja tälle sekä tarkka arvo että likiarvo pisteessä $x = 5$.

**Vihje:** Yritä suoriutua mahdollisimman vähillä Mathematican käskyillä!

**187.** Muodosta funktion $\tan x$ kertalukuja $1, 2, \ldots, 20$ olevat derivaatat. Mikä on kertalukua 10 olevan derivaatan arvo origossa?

**Vihje:** Helpointa on muodostaa derivaatoista lista. Jos listan nimi on `lst`, sen $k$:s alkio on `lst[[k]]`. Mathematica käyttää trigonometrisia funktioita *sekantti* sec ja *kosekantti* csc. Nämä määritellään yksinkertaisesti: $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$.

**188.** Laske funktion $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ derivaatta jokaisessa pisteessä $x \in \mathbb{R}$. Onko derivaattafunktio jatkuva? Piirrä sen kuvaaja.

**Vihje:** Funktio on derivoituva myös origossa, mutta derivaatta on laskettava erotusosamäärän raja-arvona (miksi?). Mathematicassa on valmiina funktio `Limit`.

**189.** Olkoot $f$ ja $g$ derivoituvia funktioita. Laske tulon ja yhdistetyn funktion derivaatat, so. derivoi lausekkeet $f(x)g(x)$ ja $f(g(x))$.

**Vihje:** Poista ensin funktioille mahdollisesti aiemmin tehdyt määrittelyt: `Remove[f,g]`. Määräämätön funktio voidaan ottaa käyttöön yksinkertaisesti kirjoittamalla `f[x]`.

**190.** Olkoon $f$, $g$ ja $h$ derivoituvia kahden muuttujan funktioita. Laske yhdistetyn funktion $f(g(x,y), h(x,y))$ osittaisderivaatat. Ovatko saadut lausekkeet sitä, mitä pitäisi?

**Vihje:** Määräämätön funktio voidaan ottaa käyttöön kirjoittamalla `f[x,y]`. Jos olet aiemmin käyttänyt samaa symbolia jossakin muussa merkityksessä, hävitä se ensin: `Remove[f]`. Derivointioperaattori on `D` riippumatta siitä, lasketaanko tavallisia vai osittaisderivaattoja.

**191.** Yhtälö $x = y^3 + y^2 + y + 1$ määrittelee funktion $y(x)$, joka origossa saa arvon $-1$. Laske implisiittisellä derivoinnilla $y'(0)$.

**Vihje:** Sijoita yhtälöön $y$:n paikalle $y(x)$ ja derivoi yhtälö.

**192.** Laske funktion $f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1-x}{1+x}$ derivaatta ja saata se mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon. Mitä tästä voidaan päätellä?

**Vihje:** arctan on Mathematicassa `ArcTan`. Piirrä myös kuvio.

**193.** Muodosta funktion $f(x) = \arctan \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ ensimmäinen ja toinen derivaatta. Piirrä näiden kuvaajat.

**Vihje:** arctan on Mathematicassa `ArcTan`.

**194.** Integroi funktio $x^n$. Onko tulos oikein kaikilla $n$? Onko samantekevää, jos jollekin symbolille ensin annetaan arvo ja sitten muokataan symbolin sisältävää lauseketta, tai jos ensin muokataan lauseketta ja vasta sitten annetaan symbolille arvo?

**Vihje:** Kokeile: `Integrate[x^n/.n->-1,x] == Integrate[x^n,x]/.n->-1`. Sijoita myös muuttujalle $n$ jokin muu arvo. Miten selität tulokset?

**195.** Etsi funktion $e^{-x^2}$ integraalifunktio. Laske määrätyt integraalit

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Määritä näille myös likiarvot. Mitä saatu integraalifunktion lauseke tarkoittaa?

**Vihje:** Funktiolla `Integrate` lasketaan sekä integraalifunktioita että määrättyjä integraaleja. Äärettömyys on `Infinity`; se voidaan myös valita paletista. Mathematica tuntee monia muitakin funktioita kuin ns. tavalliset alkeisfunktiot. Mitä nämä oikeastaan ovat, ei aina ilmene dokumentaatiosta, koska määritelmät eivät välttämättä ole yksinkertaisia.

**196.** Laske integraalit

$$\text{a)} \int \frac{x+1}{(x^2-x+1)^{10}}\,dx, \qquad \text{b)} \int \ln(1+x^{12})\,dx.$$

Ovatko Mathematican antamat tulokset oikein? Miten nämä voisi tarkistaa? Millaista menetelmää pitäisi käsinlaskussa käyttää?

**Vihje:** Symbolisissa ohjelmissa derivointi on yleensä integrointia luotettavampaa. Tarkistus voi siis tapahtua derivoimalla. Logaritmifunktio on `Log`; ks. dokumentaatiota.

## mmaFunktiot

**197.** Mathematica tuntee ns. *gammafunktion* $\Gamma(x)$ nimellä `Gamma`. Piirrä tämän ja sen derivaatan kuvaajat. Mitä arvoja funktio saa positiivisilla kokonaislukuarvoilla?

**Vihje:** Skaalaa graafinen esitys siten, että kuvaajien luonne tulee selkeästi näkyviin. Funktion arvot positiivisilla kokonaislukuarvoilla voidaan ilmaista yksinkertaisesti. Miten?

**198.** Määrittele Mathematicalle funktio

$$f(x) = x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}.$$

Laske funktion arvo pisteissä $x = -1,\ 0,\ 1$. Piirrä kuvaaja. Mikä funktion raja-arvo origossa? Onko tämä olemassa? Onko funktio jatkuva?

**Vihje:** Funktion määrittelyssä voidaan tässä tapauksessa käyttää yhtä hyvin merkkiä `=` tai merkkiä `:=`. Raja-arvo voidaan laskea myös funktiolla `Limit`; katso ohjeet dokumentaatiosta ja kokeile.

**199.** Piirrä funktion $\log_x 2$ kuvaaja ja laske sen derivaatta. Voidaanko funktio lausua luonnollisen logaritmin avulla?

**Vihje:** Mathematican funktio `Log` on luonnollinen logaritmi. $\log_k x$ merkitään `Log[k,x]`. Ks. myös dokumentaatiota.

**200.** Mathematicassa on kaksi operaattoria, joita voidaan käyttää funktioiden määrittelyssä: joko `=` (eli `Set`) tai `:=` (eli `SetDelayed`). Yritä selvittää näiden ero määrittelemällä kaksi funktiota seuraavasti:

```
f[x_,n_]= Expand[x^n]
g[x_,n_]:= Expand[x^n]
```

Laske tämän jälkeen `f[a+b,5]` ja `g[a+b,5]`.

**Vihje:** Delay = viivästää. Katso myös Mathematican dokumentaatiota. Huomaa, että `Expand` ei kehitä (ei voi kehittää) lauseketta, jonka eksponentti on symboli: Kokeile `g[a+b,n]`.

**201.** Määrittele Mathematicalle funktio

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Laske taulukko sen arvoista välillä $[0, 5]$ askelena 0.1. Piirrä funktion derivaatan kuvaaja. Muodosta integraalifunktio ja piirrä sen kuvaaja. Laske funktion integraali yli reaaliakselin. Katso, mitä antaa komento `?f`.

**Vihje:** Funktio voidaan määritellä kahdella tavalla: antamalla muotoa `f[x_]:=`... oleva määrittely tai käyttämällä funktiota `Function`. Kokeile molempia. Taulukko muodostetaan funktiolla `Table`, derivaatta saadaan esimerkiksi kirjoittamalla `f'[x]`. Integroinnissa tarvittava äärettömyys on `Infinity`; se voidaan myös valita paletista.

**202.** Määrittele Mathematicalle funktio

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ja laske sen arvot pisteissä $x = \pi/2$, $x = 1$ ja $x = 0$. Määrittele tämän jälkeen funktio origossa siten, että siitä tulee jatkuva. Laske uudelleen sen arvo origossa. Piirrä funktion kuvaaja ja kokeile, miten Mathematica tulkitsee syötteen `f'[x]`. Mitä on `f'[0]`? Katso, mitä antaa komento `?f`.

**Vihje:** Funktio voidaan määritellä kahdella tavalla: antamalla muotoa `f[x_]:=`... oleva määrittely tai käyttämällä funktiota `Function`. Edellistä tapaa käytettäessä voidaan lisäksi määritellä erikseen arvo yksittäisissä pisteissä: `f[0]=`... .

**203.** Määrittele Mathematicalle funktio, jonka kuvaaja välillä $[0, \frac{1}{2}]$ yhdistää pisteet $(0, 0)$ ja $(\frac{1}{2}, 2)$ sekä välillä $[\frac{1}{2}, 1]$ pisteet $(\frac{1}{2}, 2)$ ja $(1, 0)$. Muualla funktio on $= 0$. Piirrä funktion kuvaaja.

**Vihje:** Funktion paloittaisessa määrittelyssä käytetään symbolia `/;` rajoittamaan määrittelyaluetta, esimerkiksi `f[x_/;x > -1 && x < 1]:=`... . Vaihtoehtona on käyttää funktiota `Piecewise`.

**204.** Määrittele Mathematicalle seuraava funktio ja piirrä sen kuvaaja:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcosh}(-x), & \text{jos } x < -1, \\ \sqrt{1 - x^2}, & \text{jos } -1 \leq x \leq 1, \\ \operatorname{arcosh} x, & \text{jos } x > 1. \end{cases}$$

Katso, mitä antaa komento `?f`. Onko funktio jatkuva? Entä derivoituva? Osaako Mathematica laskea sen derivaatan?

**Vihje:** Huomaa: Hyperbolisen kosinin käänteisfunktio (päähaara) arcosh on Mathematicassa (virheellisesti) `ArcCosh`. Funktion paloittaisessa määrittelyssä käytetään symbolia `/;` rajoittamaan määrittelyaluetta, esimerkiksi `f[x_/;x > -1 && x < 1]:=`... . Myös funktiota `Piecewise` voidaan käyttää.

**205.** Määrittele $\cos(nx)$ kahden muuttujan $x$ ja $n$ funktiona. Piirrä tätä käyttäen funktioiden $\cos x$, $\cos 2x$ ja $\cos 4x$ kuvaajat samaan kuvioon.

**Vihje:** Helpointa on piirtää kukin kuvaaja erikseen ja yhdistää kuviot `Show`-komennolla yhdeksi kuvioksi. Kuvion voi piirtää myös yhdellä `Plot`-komennolla.

**206.** Määrittele Mathematicalle kahden muuttujan funktio, jonka kuvaaja välillä $[0, \frac{1}{2n}]$ yhdistää pisteet $(0, 0)$ ja $(\frac{1}{2n}, 2n)$ sekä välillä $[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]$ pisteet $(\frac{1}{2n}, 2n)$ ja $(\frac{1}{n}, 0)$. Muualla funktio on $= 0$. Piirrä funktion kuvaaja.

**Vihje:** Funktion paloittaisessa määrittelyssä tarvittavat ehdot voidaan sijoittaa myös määrittelevän lausekkeen jälkeen, esimerkiksi `f[x_,_n]:=4 n^2 x/;x >= 0 && x <= 1/(2 n)`.

**207.** Laske derivoimalla yhdistetyn funktion $f(g(x))$ ensimmäinen, toinen ja kolmas derivaatta.

**Vihje:** Yhdistettyä funktiota voidaan käsitellä suoraan muodossa `f[g[x]]`. Saisitko samat tulokset laskemalla käsin?

**208.** Jos $g$ on funktion $f$ käänteisfunktio, on kaikilla arvoilla $x$ voimassa $f(g(x)) = x$. Derivoi tätä yhtälöä kahdesti ja ratkaise tuloksista lausekkeet funktion $g$ ensimmäiselle ja toiselle derivaatalle lausuttuina funktion $f$ derivaattojen ja funktion $g$ arvon $g(x)$ avulla.

**Vihje:** Derivointi voidaan suoran kohdistaa yhtälöön: `D[f[g[x]]==x,x]`. Tulokset: $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$, $g''(x) = -\frac{f''(g(x))}{f'(g(x))^3}$. Saatko samat tulokset laskemalla käsin?

**209.** Määrittele Mathematicalle funktio

$$f(x) = \int_0^1 |x - t| \, dt.$$

Piirrä tämän määritelmän perusteella funktion ja sen derivaatan kuvaajat.

**Vihje:** Itseisarvofunktio (`Abs`) integraalin sisällä saattaa aiheuttaa ongelmia. Kokeile itseisarvojen käyttöä, mutta määrittele funktio myös paloittain itseisarvolausekkeen merkkien mukaan kolmessa osassa. Tutki, osaako Mathematica derivoida määrittelemiäsi funktioita.

**210.** Ratkaise toisen asteen $ax^2 + 2x + 1 = 0$ yhtälö ja määrittele funktiot, jotka esittävät yhtälön juuria kertoimen $a$ funktioina. Piirrä näiden funktioiden kuvaajat. Missä alueessa funktiot ovat määriteltyjä? Miten ne käyttäytyvät, kun $a \to 0$, jolloin yhtälö muuttuu ensimmäisen asteen yhtälöksi?

**Vihje:** Ratkaise yhtälö `Solve`-komennolla ja käytä tulosta suoraan funktioiden määrittelyssä. Funktionmäärittelyssä on syytä käyttää merkkiä `=` eikä `:=`. (Miksi?)

**211.** Fibonaccin luvut määritellään ehdoilla $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$. Määrittele Mathematican funktio, joka laskee Fibonaccin lukuja antamalla määrittelyt `a[0]=1; a[1]=1; a[n_]:=a[n-1]+a[n-2]` ja laske tämän avulla Fibonaccin luvut $a_{10}$ ja $a_{20}$. Muodosta myös taulukko, jossa on 20 ensimmäistä lukua.

**Vihje:** Ennen Mathematican funktion `a` määrittelyä anna komento `Remove[a]`, jolla poistetaan mahdolliset aiemmat määrittelyt. Katso myös, mitä komento `?a` määrittelyn jälkeen antaa. Kyseessä on rekursiivinen funktiomäärittely. Taulukko voidaan muodostaa funktiolla `Table`. Miksi taulukon laskeminen kestää?

**212.** Funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ määritellään ehdoilla

$$
\begin{aligned}
f(n) &= n - 5, \quad \text{kun } n > 10, \\
f(n) &= f(f(n+6)), \quad \text{kun } 1 \leq n \leq 10.
\end{aligned}
$$

Tutki, mitä arvoja funktio saa.

**Vihje:** Funktion arvot voidaan laskea taulukkoon `Table`-funktiolla. Miten laskisit käsin arvon $f(1)$?

**213.** Olkoot $A$ ja $B$ äärellisen monen alkion joukkoja. Joukossa $A$ on $m$ alkiota ja joukossa $B$ on $n$ alkiota. Olkoon $S(m,n)$ surjektioiden $A \to B$ lukumäärä. Tälle pätee

$$
\begin{aligned}
&S(m,1) = 1, \\
&S(m,n) = n^m - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S(m,k), \quad n = 2, 3, \ldots.
\end{aligned}
$$

Muodosta surjektioiden määrän osoittava taulukko, kun $1 \leq m \leq 5$, $1 \leq n \leq 5$. Onko itsestään selvää, mitkä taulukon alkiot ovat $= 0$? Miksi? Mitä lukuja ovat taulukon lävistäjäalkiot? Osaatko päätellä kaavojen pätevyyden?

**Vihje:** Surjektio $A \to B$ on funktio, jossa jokainen maalijoukon $B$ alkio on jonkin alkion kuva. Summa voidaan muodostaa funktiolla `Sum`, binomikerroin on `Binomial`. Taulukon (kaksinkertaisen listan) voi muodostaa `Table`-komennolla ja sen saa näkymään kaksiulotteisena kirjoittamalla perään `//TableForm`.

**214.** Mathematicalle voidaan määritellä myös monimutkaisempia funktioita funktioidenmäärittelyfunktion `Function` avulla. Määrittele funktio $f$ asettamalla

```
f = Function[x,FactorInteger[x][[1,1]]]
```

ja tutki, mitä se laskee, kun argumenttina on luonnollinen luku.

**Vihje:** Tutki erikseen, mitä `FactorInteger` antaa. Indeksimerkintä `[[1,1]]` poimii sen tulostuksesta osan.

## mmaGrafiikka

**215.** Piirrä funktion $f(x) = \sin 8x + \sin 9x$ kuvaaja.

**Vihje:** Tarkastele riittävän pitkää väliä. Muista merkinnät: `Sin[8 x]` etc.

**216.** Tšebyševin polynomit määritellään välillä $[-1, 1]$ lausekkeella

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Piirrä polynomien $T_n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$, kuvaajat samaan kuvioon.

**Vihje:** Funktioiden nimet ovat `Cos` ja `ArcCos`. Yhden kuvaajan piirtäminen tapahtuu komennolla `Plot`. Useita kuvioita voidaan yhdistää samaan kuvaan komennolla `Show`, jonka argumenteiksi kirjoitetaan ne tulosteet, jotka kuvaan halutaan. Esimerkiksi `%`*k* viittaa tulosteeseen `Out[`*k*`]`; tulosteille voidaan antaa myös nimet kirjoittamalla esimerkiksi `kuva1 = Plot ....`

**217.** Piirrä sini- ja kosinifunktioiden kuvaajat muotoa

```
Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, -Pi, Pi},
   PlotStyle -> {Dashing[{0.1, 0.05}],
   {RGBColor[0.9, 0.3, 0.4], Thickness[0.05]}}
```

olevalla käskyllä. Selvitä kokeilemalla, mitä `PlotStyle`-määrittelyssä olevat parametrit vaikuttavat kuvioon.

**Vihje:** Parametrien merkitystä voi tutkia myös Mathematican dokumentaatiosta.

**218.** Piirrä funtion $f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 5x$ kuvaaja.

**Vihje:** Tarvittava funktio on `Plot3D`. Tutki piirtoalueen vaikutusta kuvaajan muotoon ja miten siihen voidaan vaikuttaa `Plot3D`-funktion optioilla (katso dokumentaatiota).

**219.** Piirrä funtion $f(x, y) = \arctan(y/x)$ kuvaaja. Miten funktio käyttäytyy origon ympäristössä? Miten funktion voi luonnehtia geometrisesti? Onko funktio jatkuva?

**Vihje:** Funktionnimi on `ArcTan`. Tarvittava piirtokomento on `Plot3D`. Piirtotiheyttä voi säätää optioilla `PlotPoints` tai `Mesh`. Muitakin optioita on; katso dokumentaatiota.

**220.** Piirrä kahden muuttujan funktion $f(x, y) = \log_y x$ kuvaaja.

**Vihje:** Mieti ensin, millä arvoilla $(x, y)$ funktio on määritelty.

**221.** Piirrä kahden muuttujan funktion

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

kuvaaja. Tutki erityisesti funktion käyttäytymistä origon ympäristössä.

**Vihje:** Käytä sekä funktiota `Plot3D` että funktiota `ParametricPlot3D`. Voitaisiinko käyttää napakoordinaatteja? Säädä piirtotiheys sopivaksi optiolla `Mesh`. Onko funktio jatkuva origossa?

**222.** Piirrä kuva parametrimuodossa annetusta käyrästä

$$x = \cos pt, \quad y = \sin qt, \quad t \in [0, 2\pi],$$

missä $p$ ja $q$ ovat numeerisia kertoimia.

**Vihje:** Piirtokomento on `ParametricPlot`. Tutki myös, mitä optioita on käytettävissä.

**223.** Piirrä kuva parametrimuodossa annetusta kolmiulotteisen avaruuden käyrästä

$$x = (5 + \cos 25t)\cos 5t,\ y = (5 + \cos 25t)\sin 5t,\ z = \sin 25t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

**Vihje:** Piirtokomento on `ParametricPlot3D`.

**224.** Piirrä kuva parametrimuodossa annetusta kolmiulotteisen avaruuden käyrästä

$$x = (2\pi - t)\cos 5t,\ y = (2\pi - t)\sin 5t,\ z = t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Muunna parametriesitystä siten, että saadaan pallopinnalla sijaitseva spiraali.

**Vihje:** Piirtokomento on `ParametricPlot3D`. Piirtotiheyttä voidaan säätää optiolla `PlotPoints`. Pallopinta: Jos korkeuskoordinaatti on $t$, niin mikä on pisteen etäisyys z-akselista?

**225.** Piirrä alueessa $-25 \le x \le 25$, $-5 \le y \le 5$ kuva käyrästä $x = y^3 - 5y^2 + y + 3$ `ParametricPlot`-funktiolla.

**Vihje:** Valitse parametriksi $y$.

**226.** Piirrä kuva parametrimuodossa annetusta ruuvipinnasta:

$$x = u(1 - \frac{v}{8\pi})\cos v, \quad y = u(1 - \frac{v}{8\pi})\sin v, \quad z = \frac{1}{5}(v - u), \quad u \in [0, 3],\ v \in [0, 8\pi].$$

**Vihje:** Piirtokomento on `ParametricPlot3D`. Säädä piirtotiheys sopivaksi, niin että saat kauniin kuvan: optio `Mesh`.

**227.** Tutki, millaista pintaa esittää parametriesitys

$$x = \cos u(a + b\cos v),\ y = \sin u(a + b\cos v),\ z = b\sin v, \quad u \in [0, 2\pi],\ v \in [0, 2\pi].$$

Anna piirtämistä varten vakioille $a$ ja $b$ erilaisia (positiivisia) arvoja ja yritä päästä selville niiden merkityksestä. Tutki myös, mitä vaikuttaa optio `Shading->False` grafiikkakomennossa.

**Vihje:** Tutki aluksi tapausta, missä $a/b = 2$, mutta tarkastele myös tapauksia, missä suhde on $= 1$ tai $< 1$. Pinnasta saa paremman käsityksen piirtämällä siitä vain sopivan osan, ts. rajoittamalla parametrien $u$ ja $v$ vaihteluväliä.

**228.** Yhtälö

$$x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - 10x^2 - 10y^2 + 6z^2 + 9 = 0$$

esittää erästä kolmiulotteisen avaruuden pintaa, *ympyrärengasta* eli *torusta*. Leikkaa pintaa tasoilla $z =$ vakio ja $x =$ vakio ja piirrä leikkauskäyrät.

**Vihje:** Käytä funktiota `ContourPlot`. Millaisia kvalitatiivisesti erilaisia leikkauskäyriä syntyy?

**229.** Piirrä origon ympäristössä kuva käyrästä $y^4 + y^2 + xy = x^3 - x$.

**Vihje:** Käytä funktiota `ContourPlot`.

**230.** Tutki, mitkä xy-tason pisteet toteuttavat yhtälön $\log_y x = \log_x y$. Piirrä kuvio.

**Vihje:** Logaritmifunktio on `Log`. Käytä funktiota `ContourPlot`. Mieti, mikä on sopiva piirtoalue.

**231.** Tutki funktion $f(x, y) = y^x$ käyttäytymistä origon ympäristössä alueessa $x > 0$, $y > 0$: piirrä kuvaaja (pinta), piirrä pinnan korkeuskäyriä, laske funktion arvoja. Mitä arvoja funktio saa origoa lähestyttäessä?

**Vihje:** Tarvittavia funktioita: `Plot3D`, `ContourPlot`. Jälkimmäiselle voidaan antaa optiona korkeuskäyrien korkeudet muodossa `Contours->{...}`, missä korkeudet luetellaan listassa; katso myös dokumentaatiota.

**232.** Piirrä origon ympäristössä kuva pinnasta $x^3 + y^3 + z^3 - x^2yz - xy^2z - xyz^2 - 1 = 0$.

**Vihje:** Käytä funktiota `ContourPlot3D`. Katso dokumentaatiosta käyttöohjeet.

## mmaLausekkeet

**233.** Sievennä lauseke $\dfrac{x-1}{(1-\frac{1}{\sqrt{x}})(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}$.

**Vihje:** Sopivia Mathematican funktioita ovat `Simplify` ja `FullSimplify`.

**234.** Talleta lauseke $(a + b)^{10}$ jollekin nimelle ja kehitä se. Jaa tulos tekijöihin, jolloin palataan alkuperäiseen lausekkeeseen.

**Vihje:** Tarvittavat Mathematican funktiot ovat `Expand` ja `Factor`. Näiden argumenttina oleva lauseke voi olla joko hakasuluissa tai komento voidaan kirjoittaa sen perään: `Expand[`*`lauseke`*`]` tai *`lauseke`*`//Expand`.

**235.** Jaa tekijöihin kahden muuttujan polynomi

$$x^5 + 2x^4y - x^3y^2 - 2x^2y^3 - x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 + 2y^4.$$

Kehitä saamasi tulos, jolloin palataan alkuperäiseen lausekkeeseen.

**Vihje:** Tarvittavat Mathematican funktiot ovat `Expand` ja `Factor`.

**236.** Tutki, mikä lauseke on tekijänä lausekkeessa $a^n - b^n$ riippumatta eksponentin $n \in \mathbb{N}$ arvosta. Missä tapauksessa lausekkeella $a^n + b^n$ on vastaavanlainen tekijä? Supista lausekkeet

$$\frac{a^{15} - b^{15}}{a^7 - b^7} \quad \text{ja} \quad \frac{a^{15} + b^{15}}{a^7 + b^7}\ .$$

Mitä säännönmukaisuutta tuloksen osoittajassa ja nimittäjässä on?

**Vihje:** Tekijöihin jako: `Factor`. Supistaminen: `Cancel`. Kokeile luvulle $n$ erikseen eri arvoja. (Miksi yleistä symbolia $n$ ei voida käyttää?) Kokeilut voidaan laskea myös yhteen taulukkoon käyttämällä komentoa `Table`; tulostuksen saa hieman selkeämpään muotoon kirjoittamalla komennon jälkeen `//TableForm`.

**237.** Lavenna murtolauseke

$$\frac{a + x}{\sqrt{a + x} - \sqrt{x}}$$

siten, että juuria ei esiinny nimittäjässä.

**Vihje:** Murtolausekkeesta voi poimia osoittajan funktiolla `Numerator` ja nimittäjän lausekkeella `Denominator`. Kokeile myös, mitä tapahtuu, kun murtolausekkeeseen kohdistetaan peräkkäin funktiot `Apart` ja `Simplify`. Mitä nämä periaatteessa tekevät?

**238.** Hajota seuraavat rationaalilausekket osamurtokehitelmiksi, joissa nimittäjät ovat ensimmäistä astetta tai ensimmäisen asteen polynomin potensseja:

$$\frac{x}{x^2 + 5x + 6}, \qquad \frac{2x + 7}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}.$$

Miten päästään takaisin alkuperäiseen lausekkeeseen?

**Vihje:** Sopivia funktioita: `Apart`, `Together`, `Simplify`, `Expand` ...

**239.** Muodosta osamurtokehitelmä lausekkeelle

$$\frac{4696 - 11076x + 11290x^2 - 6227x^3 + 1687x^4 + 180x^5 - 364x^6 + 156x^7 - 36x^8 + 4x^9}{-1152 + 2496x - 2528x^2 + 1616x^3 - 704x^4 + 208x^5 - 40x^6 + 4x^7}.$$

Lisää tämän jälkeen lausekkeen nimittäjään 1 ja muodosta osamurtokehitelmä uudelleen. Miksi toisessa tapauksessa onnistutaan, toisessa ei?

**Vihje:** Sopivia funktioita: `Apart`, `Numerator`, `Denominator`. Myös hiirtä ja paletteja voi hyödyntää.

**240.** Tutki, tarkoittaako Mathematican merkintä `x^x^x` samaa kuin `(x^x)^x` vai samaa kuin `x^(x^x)`. Sievennä, derivoi ja integroi kumpikin vaihtoehto.

**Vihje:** Yksinkertainen sievennyskomento `Simplify` ei auta, koska Mathematica varautuu mahdollisuuteen, että muuttujat ovat kompleksisia, jolloin tavanomaiset laskusäännöt eivät rajoituksitta olekaan voimassa. Kokeile tämän johdosta seuraavia sievennyskäskyjä: `Simplify[..., x>0]` ja `PowerExpand`. Katso näiden komentojen tarkempaa selitystä Mathematican dokumentaatiosta.

**241.** Talleta lauseke $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ jollekin nimelle ja laske sen arvo, kun a) $x = 2$, $y = 3$, b) $x = -5$, $y = \pi$. Laske sekä tarkka arvo, että 50-desimaalinen likiarvo. Ovatko desimaaliesitykset jaksollisia?

**Vihje:** Käytä arvojen sijoittamisessa korvausoperaattoria `/.` (eli `ReplaceAll`). Likiarvojen laskeminen funktiolla `N`.

**242.** Mathematicassa on kaksi operaattoria, joilla muuttujalle annetaan arvo: joko `=` (eli `Set`) tai `:=` (eli `SetDelayed`). Yritä selvittää näiden ero antamalla syötteet

```
a=RandomInteger[{1,100}]
Table[a,{10}]
b:=RandomInteger[{1,100}]
Table[b,{10}]
```

**Vihje:** Delay = viivästää. Katso myös Mathematican dokumentaatiota. Funktio `RandomInteger` generoi satunnaisia kokonaislukuja; sen argumenttina annetaan väli, jolta luvut otetaan.

**243.** Kaksi matkapuhelinmastoa näkyy paikkaan, jonka etäisyys toisesta mastosta on 5,27 km ja toisesta 3,16 km. Tähtäyssuunnat mastoihin muodostavat $72^\circ\, 50'$ suuruisen kulman. Kuinka etäällä mastot ovat toisistaan? Etäisyydet mitataan vaakasuorasti, eikä maaston mahdollisia korkeuseroja oteta huomioon.

**Vihje:** Trigonometristen funktioiden argumentit ilmoitetaan Mathematicassa radiaaneissa. Radiaanien ja asteiden välinen muunnoskerroin on valmiina nimellä `Degree` (katso dokumentaatiota), mutta kertoimen voi tietenkin muodostaa itsekin. Muista: Funktioiden nimet kirjoitetaan isolla alkukirjaimella, argumentit annetaan hakasuluissa.

**244.** Tutki lausekkeiden

a) $\sqrt{(x-2)^2}$

b) $\sin(5x)$

c) $\sin(x+y)$

d) $\exp(ix)+\exp(-ix)$

e) $\cos(\arccos x)$

f) $\arccos(\cos x)$

g) $\exp(\ln x)$

h) $\ln(\exp x)$

sieventämistä. Mitä näistä pitäisi tulla? Mitä Mathematica antaa ja millä komennolla? Mitä symbolisen ohjelman itse asiassa pitäisi antaa vastaukseksi, kun muuttujaa $x$ ei ole millään tavoin rajoitettu?

**Vihje:** Mathematicalla on useita erilaisia `Expand`- ja `Simplify`-tyyppisiä komentoja. Muista: Funktioiden nimet kirjoitetaan isolla alkukirjaimella, joskus isoja kirjaimia voi olla muuallakin: `ArcCos`. Argumentit annetaan hakasuluissa. Imaginaariyksikkö on `I`.

**245.** Muokkaa muotoa $\sin(nx)$, $\cos(nx)$, $\sin^n x$, $\cos^n x$ olevia trigonometrisia lausekkeita erilaisiin muotoihin, kun $n$ on jokin luonnollinen luku (ei symboli).

**Vihje:** Käytä funktioita `TrigFactor`, `TrigExpand`, `TrigReduce`, `ExpToTrig`, `TrigToExp`. Muista: Funktioiden nimet kirjoitetaan isolla alkukirjaimella, argumentit annetaan hakasuluissa.

**246.** Sievennä Tšebyševin polynomin lauseke $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $n \in \mathbb{N}$, muotoon, josta ilmenee, millainen polynomi on kyseessä. Mikä on polynomin asteluku?

**Vihje:** Anna symbolille $n$ numeerisia arvoja. Funktioiden nimet ovat `Cos` ja `ArcCos`.

**247.** Astetta $n$ olevan polynomin nollakohdat olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Määritä polynomien kertoimien lausekkeet nollakohtien funktioina tapauksissa $n = 2, 3, 4, 5$. Miten polynomin kertoimet riippuvat nollakohdista?

**Vihje:** Polynomi voidaan nollakohtien avulla kirjoittaa tulomuotoon

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Hyödyllisiä funktioita ovat mm. `Product`, `Collect`, `Coefficient`, `CoefficientList`. Jos listassa on pitkiä alkioita, sen voi tulostaa selkeämpään muotoon kirjoittamalla perään `//TableForm`.

**248.** Yhtälöt

$$x = \cos u(a + b\cos v),\ \ y = \sin u(a + b\cos v),\ \ z = b\sin v$$

esittävät erästä pintaa, *ympyrärengasta* eli *torusta* parametrimuodossa. Etsi torukselle muotoa $F(x, y, z) = 0$ oleva yhtälö eliminoimalla eo. yhtälöistä parametrit $u$ ja $v$.

**Vihje:** Eliminointi voidaan tehdä funktiolla `Eliminate`; ks. käyttöohjeet Mathematican dokumentaatiosta. Se toimii kuitenkin parhaiten polynomeihin sovellettuna ja trigonometristen funktioiden tapauksessa ei kovin yksinkertaisiin lausekkeisiin päästä. Vaikeudet voidaan välttää seuraavasti: Eliminoitaviksi muuttujiksi otetaan parametrien $u$ ja $v$ sijasta niiden sinit ja kosinit, ts. tehdään eo. yhtälöihin sijoitus `Sin[u]->u1, Cos[u]->u2, Sin[v]->v1, Cos[v]->v2`. Uusien muuttujien välillä ovat voimassa yhtälöt `u1^2 + u2^2 == 1` ja `v1^2 + v2^2 == 1`, jolloin on kaikkiaan viisi yhtälöä, joista on eliminoitava neljä muuttujaa.

**249.** Yhtälö

$$x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - 10x^2 - 10y^2 + 6z^2 + 9 = 0$$

esittää erästä kolmiulotteisen avaruuden pintaa, *ympyrärengasta* eli *torusta.* Jos pintaa leikataan tasolla $z = 0$ tai tasolla $x = 0$, saadaan leikkauskäyräksi kaksi ympyrää. Määritä näiden yhtälöt.

**Vihje:** Muodosta leikkauskäyrien yhtälöt sijoittamalla vuorollaan arvot $x = 0$ ja $z = 0$ annettuun yhtälöön. Jaa yhtälön vasen puoli tekijöihin! (Mahdollista tarvetta varten: Jos yhtälön nimenä on `yht`, niin `yht[[1]]` on sen vasen ja `yht[[2]]` oikea puoli.)

**250.** Ratkaise yhtälöiden

1. $168x = 195$
2. $x^2 - 2x - 4 = 0$
3. $x^3 - x^2 + x - 21 = 0$
4. $(a - b)x^2 + ax + b = 0$

kaikki juuret. Sijoita juuret takaisin yhtälöihin ja tutki, toteutuvatko yhtälöt.

**Vihje:** Talleta ensin yhtälö jollekin nimelle. Yhtälöissä käytetään yhtäläisyysmerkkinä `==`. Yhtälön ratkaiseminen `Solve`-funktiolla tuottaa ratkaisut ns. korvaussääntöjen muodossa. Näiden avulla voidaan saadut juuret helposti sijoittaa mihin tahansa lausekkeeseen, esimerkiksi yhtälöön: *`yhtalo/.korvaus`*. Tässä `/.` on lyhennemerkintä Mathematican funktiolle `ReplaceAll`.

## mmaLineaarialgebra

**251.** Muodosta taulukko (matriisi), jonka alkioina ovat luvut $k^j$, $k = 1,\ldots,10$, $j = 1,\ldots,10$.

**Vihje:** Tarvittavia funktiota: `Table`, `TableForm`; katso dokumentaatiota.

## mmaSarjat

**252.** Laske sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ summa ja piirrä kuvio, joka osoittaa, miten osasummat lähestyvät sarjan summaa.

**Vihje:** Muodosta osasummista lista ja piirrä kuvio funktiolla `ListPlot`.

**253.** Laske sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)^k$$

summa. Millä arvoilla $x \in \mathbb{R}$ sarja suppenee? Piirrä summafunktion kuvaaja.

**Vihje:** Sarjan summa lasketaan funktiolla `Sum`. Suppenemisalueen tarkastelussa voidaan käyttää funktiota `Reduce` reaalilukualueella (`Reals`).

**254.** Muodosta funktiolle $f(x) = \exp(\arctan x)$ Maclaurinin polynomeja. Valitse asteluvuiksi ainakin 10, 20, 30, 40 ja 50. Vertaa näiden kuvaajia funktion kuvaajaan. Millä muuttujan arvoilla Maclaurinin sarja näyttäisi suppenevan?

**Vihje:** Käytä funktiota `Series`. Sarjan jäännöstermi voidaan pudottaa pois komennolla `Normal`.

**255.** Kehitä funktio $f(x) = \sqrt{9x^2 - 3x + 5}$ Taylorin sarjaksi pisteissä $x = 0$, $x = 2$ ja $x = 5$. Piirrä Taylorin polynomien kuvaajat astelukuun 10 saakka ja vertaa niitä funktion kuvaajaan. Miten laajassa alueessa Taylorin sarja näyttäisi suppenevan?

**Vihje:** Sarja muodostetaan komennolla `Series`, jolle on myös ilmoitettava, montako termiä alusta lähtien halutaan. Tuloksessa on muotoa `O[x^n]` oleva jäännöstermi, joka on pudotettava pois, jotta osasumman kuvaaja saadaan piirretyksi. Tämä tehdään komennolla `Normal`.

**256.** Suhteellisuusteorian mukainen kappaleen kineettinen energia on

$$T = mc^2 - m_0c^2, \quad \text{missä } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Osoita origokeskiseksi Taylorin sarjaksi kehittämällä, että pienillä nopeuksilla $v$ tämä on likimain sama kuin klassinen kineettinen energia $\frac{1}{2}m_0v^2$.

**Vihje:** Komento `Series`.

## mmaTodennäköisyyslaskenta

**257.** Tutkimuksessa todettiin, että 200 gramman keksipakkausten massan keskiarvo oli 204 g ja keskihajonta 6 g. Oletetaan, että massa on normaalisti jakautunut. Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli alle 200 g? Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli välillä 200 g – 210 g?

**Vihje:** Tutki funktioita `NormalDistribution` ja `CDF` (= *cumulative distribution function* = kertymäfunktio), joiden avulla voidaan laskea mihin tahansa normaalijakaumaan liittyvät todennäköisyydet.

## mmaVektorianalyysi

**258.** Jaa vektori $\mathbf{c} = 7\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ vektoreiden $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

**Vihje:** Esitä vektorit kaksialkioisina listoina. Muodosta näiden avulla vektoriyhtälö ja ratkaise se `Solve`-funktiolla.

**259.** Olkoot $A = (7, 3)$, $B = (1, 2)$ ja $C = (3, 5)$ tason pisteitä. Muodosta kulman $ABC$ puolittajan suuntavektori ja sen suuntainen yksikkövektori.

**Vihje:** Syötä aluksi pisteet kahden alkion listoina ja muodosta näiden avulla tarvittavat vektorit. Puolittajavektori saadaan helpoimmin kulman kylkien suuntaisten yksikkövektoreiden summana.

**260.** Kolmion kärkipisteet ovat $(1, 2)$, $(-3, 5)$ ja $(-1, -6)$. Määritä kolmion keskijanojen leikkauspiste $(x, y)$ muodostamalla sille vektoriyhtälöt ja ratkaisemalla koordinaatit näistä. Osoita laskemalla, että keskijanat todellakin leikkaavat samassa pisteessä, joka jakaa keskijanat suhteessa $1 : 2$.

**Vihje:** `Solve`-komennolla voidaan ratkaista myös vektoriyhtälöiden muodostama ryhmä. Vaadi esimerkiksi, että pisteen $(x, y)$ ja kolmion kärkipisteen yhdysvektori on samasta kärjestä vastakkaisen sivun keskipisteeseen suuntautuvan vektorin skalaarikerrannainen. Koska kärkiä on kolme, saadaan kolme vektori- eli kuusi skalaariyhtälöä, joissa on viisi tuntematonta: $x$, $y$ ja kolme skalaarikerrointa.

**261.** Todista yleisesti, että kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka jakaa ne suhteessa $1 : 2$. Tarkastele tätä varten kolmiota, jonka kärkipisteet ovat $(a_1, a_2)$, $(b_1, b_2)$ ja $(c_1, c_2)$. Merkitse keskijanojen leikkauspistettä $(x, y)$ ja muodostama sille vektoriyhtälöt. Ratkaise nämä ja tulkitse tulos.

**Vihje:** `Solve`-komennolla voidaan ratkaista myös vektoriyhtälöiden muodostama ryhmä. Vaadi esimerkiksi, että pisteen $(x, y)$ ja kolmion kärkipisteen yhdysvektori on samasta kärjestä vastakkaisen sivun keskipisteeseen suuntautuvan vektorin skalaarikerrannainen. Koska kärkiä on kolme, saadaan kolme vektori- eli kuusi skalaariyhtälöä, joissa on viisi tuntematonta: $x$, $y$ ja kolme skalaarikerrointa.

**262.** Vektorit $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ ovat kolmion kärkipisteiden $A$, $B$ ja $C$ paikkavektorit. Olkoon $P$ sivuille $AC$ ja $BC$ piirrettyjen korkeusjanojen leikkauspiste ja $\mathbf{p}$ sen paikkavektori. Tällöin pätee

$$(\mathbf{p}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{c})=0, \quad (\mathbf{p}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0.$$

Jos voidaan todistaa, että myös $(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})=0$, on tullut todistetuksi, että kaikki kolme korkeusjanaa leikkaavat samassa pisteessä. Suorita todistus Mathematican vektorialgebraa käyttäen.

**Vihje:** Esitä tehtävän vektorit symbolisina kaksi- (tai kolmi-) komponenttisina listoina, so. Mathematican vektoreina. Funktioista `Simplify` ja `FullSimplify` on apua; katso dokumentaatiota.

**263.** Kolmiulotteisen avaruuden taso kulkee pisteiden $A=(7,3,1)$, $B=(1,2,3)$ ja $C=(3,5,-5)$ kautta. Laske tason yksikkönormaalivektori.

**Vihje:** Syötä pisteet kolmialkioisina listoina ja laske näillä. Normaali voidaan määrittää joko skalaaritulojen avulla tai vektorituloa käyttäen.

**264.** Määritä $u$ siten, että vektoreiden $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ ja $u\mathbf{i}+5\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ välinen kulma on 60 astetta.

**Vihje:** Hyödynnä skalaarituloa. Mieti, montako ratkaisua tehtävällä on. Tarkista saamasi tulos.

**265.** Kolmiulotteisessa avaruudessa sijaitsevan kolmion kärkipisteet ovat $(1,2,3)$, $(-2,4,5)$ ja $(2,-5,-7)$. Laske kolmion ala.

**Vihje:** Käytä vektoreita. Kolmion ala voidaan lausua ristitulon (`Cross`) avulla.

**266.** Kolmiulotteisessa avaruudessa sijaitsevan kolmion kärkipisteet ovat $(1,2,3)$, $(-2,4,5)$ ja $(2,-5,-7)$. Laske kolmion kulmien suuruudet asteissa.

**Vihje:** Sovella vektorialgebraa, erityisesti skalaarituloa. Kosinifunktion käänteisfunktio on `ArcCos`; tämä antaa kulman suuruuden radiaaneina.

**267.** Mikä suoran $(x,y)=(1,2)+t(3,4)$ piste on lähinnä pistettä $(8,1)$? Mikä on tämä lyhin etäisyys?

**Vihje:** Käytä vektorialgebraa.

**268.** Mikä suoran $(x,y,z)=(3,0,1)+t(1,1,4)$ piste on lähinnä pistettä $(1,4,2)$? Mikä on tämä lyhin etäisyys?

**Vihje:** Käytä vektorialgebraa.

**269.** Missä pisteessä suora $(x,y,z)=(1,2,3)+t(4,5,6)$ leikkaa tason $x-2y+3z-4=0$?

**Vihje:** Käytä vektorialgebraa.

**270.** Taso kulkee pisteiden $(1,2,3)$, $(-2,4,5)$ ja $(2,-5,-7)$ kautta. Mikä tason piste on lähinnä pistettä $(3,2,1)$ ja mikä on tämä lyhin etäisyys?

**Vihje:** Käytä vektorialgebraa.

**271.** Tarkastellaan avaruuskäyrää $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\,t\,\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$. Piirrä käyrä.

a) Muodosta käyrälle parametriesitys, missä parametrina on arvoa $t = 0$ vastaavasta pisteestä parametrin $t$ kasvusuuntaan mitattu kaarenpituus $s$.

b) Määritä käyrältä piste $P$, joka on käyrää pitkin mitattuna etäisyydellä 2 pisteestä $(1,1,0)$ parametrin $t$ kasvusuuntaan. Laske koordinaattien likiarvot ja vertaa kuvaan.

c) Laske käyrän kaarevuus ja kierevyys pisteessä $P$ sekä tähän pisteeseen liittyvä kolmikanta $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$.

d) Määritä käyrän pisteeseen $P$ liittyvän kaarevuusympyrän keskipiste ja säde.

e) Missä pisteessä käyrän kaarevuus on suurimmillaan ja mikä on maksimiarvo? Vastaavatko arvot kuvaa?

f) Missä pisteessä käyrän kierevyys on suurimmillaan ja mikä on maksimiarvo?

**Vihje:** Kertaa käyräteoria jostakin oppikirjasta! Em. laskujen läpivieminen johtaa yleensä vaikeuksiin, koska kaarenpituusintegraalista tulee liian monimutkainen. Tehtävän käyrä on kuitenkin poikkeuksellinen: lasku onnistuu! Syötä käyrä Mathematican vektorina, so. kolmialkioisena listana ja laske vektorialgebraa käyttäen.

**272.** Muodosta lista (vektori), jossa on 20 ensimmäistä alkulukua. Muodosta toinen lista, jossa on 20 ensimmäistä sellaista alkulukua, joiden järjestysluku on myös alkuluku.

**Vihje:** Tarvittavia funktioita: `Table`, `Prime`. Kiinnostava voi olla myös `PrimeQ`

**273.** Määrätty integraali voidaan laskea numeerisesti esimerkiksi puolisuunnikassäännöllä

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n).$$

Tässä integroimisväli on jaettu $n$ yhtä suureen osaväliin ja luvut $y_k$ tarkoittavat funktion arvoja jakopisteissä. Laske integraali $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ puolisuunnikassäännöllä käyttäen arvoja $n = 4, 8, 12, 16, 20$. Muodosta jokaisessa tapauksessa ensin kaksi vektoria: toisessa on funktion arvot tarvittavissa jakopisteissä ja toisessa vastaavat painokertoimet.

**Vihje:** Anna aluksi arvo muuttujalle $n$ ja muodosta vektorit tämän avulla. Miten vektoreiden sisätuloa voidaan laskennassa hyödyntää? Miten tulokset saadaan helpoimmin muilla arvoilla $n$? Miten nämä suhtautuvat `NIntegrate`-funktion antamaan tulokseen?

**274.** Määrätty integraali voidaan laskea numeerisesti esimerkiksi Simpsonin säännöllä

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n).$$

Tässä integroimisväli on jaettu parilliseen määrään $n$ yhtä suuria osavälejä ja luvut $y_k$ tarkoittavat funktion arvoja jakopisteissä. Laske integraali $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ Simpsonin säännöllä käyttäen arvoja $n = 4, 8, 12, 16$. Muodosta jokaisessa tapauksessa ensin kaksi vektoria: toisessa on funktion arvot tarvittavissa jakopisteissä ja toisessa vastaavat painokertoimet.

**Vihje:** Anna aluksi arvo muuttujalle $n$ ja muodosta vektorit tämän avulla. Painokerroinvektoria muodostettaessa voidaan käyttää esimerkiksi Mathematican funktioita `If` ja `EvenQ` (katso dokumentaatiota). Miten vektoreiden sisätuloa voidaan laskennassa hyödyntää? Miten tulokset saadaan helpoimmin muilla arvoilla $n$? Miten nämä suhtautuvat `NIntegrate`-funktion antamaan tulokseen?

## mmaYhtälöt

**275.** Etsi yhtälön $x^3 - 2x - 5 = 0$ kaikki juuret. Etsi sekä tarkat arvot että likiarvot ja sijoita kummatkin takaisin yhtälöön. Toteutuuko yhtälö?

**Vihje:** Likiarvot voidaan laskea joko tarkkojen arvojen likiarvoina funktiolla `N` tai suoraan käyttämällä funktiota `NSolve`. Juurten sijoittaminen yhtälöön: *`yhtalo/.korvaus`*, missä `/.` on lyhennemerkintä Mathematican funktiolle `ReplaceAll`.

**276.** Etsi yhtälön $x^7 - 2x - 5 = 0$ kaikki juuret. Sijoita jonkin juuren kaksi-, kolmi- ja nelidesimaaliset likiarvot alkuperäiseen yhtälöön ja tutki, millä tarkkuudella se toteutuu. Onko juurille mahdollista löytää tarkat arvot? Kuinka monta reaalista juurta yhtälöllä on? Voidaanko yhtälön toteutumisen tarkkuudesta päätellä juuren likiarvon tarkkuus?

**Vihje:** Mathematican versiosta riippuen juurten tarkat arvot saatetaan esittää hieman erikoisessa muodossa `Root`-funktion avulla. Tämä itse asiassa ilmoittaa vain, että kyseessä on juuri tämän polynomin juuri!

**277.** Muodosta toisen asteen yhtälön yleiset ratkaisukaavat ratkaisemalla yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$. Laske $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, missä $x_1$ ja $x_2$ ovat saadut juuret. Tarkastele esimerkkinä yhtälöä $2x^2 + 3x + 4 = 0$.

**Vihje:** Suorita laskut siten, että et joudu käsin syöttämään uudelleen jo laskettuja tuloksia. Käytä korvausoperaattoria `ReplaceAll` eli `/.` sopivalla tavalla. Esimerkkiyhtälön juuret ovat kompleksilukuja, mutta juurista muodostettu lauseke on yksinkertainen reaalinen murtoluku.

**278.** Johda `Solve`-funktiota käyttäen toisen ja kolmannen asteen yhtälön yleiset ratkaisukaavat. Ratkaise näiden avulla yhtälöt $15x^2+2x+12=0$ ja $x^3-2x-5=0$ sijoittamalla kertoimien arvot ratkaisukaavaan. Syntyykö toisen asteen tapauksessa tutut ratkaisukaavat? Antaako kertoimien sijoittaminen ratkaisukaavaan samat juuret kuin yhtälön ratkaiseminen suoraan?

**Vihje:** Yleiset ratkaisukaavat saadaan ratkaisemalla `Solve`-funktiolla yhtälöt, joissa kertoimet ovat symboleja.

**279.** Ratkaise yhtälö $x^3+1=0$ sijoittamalla kertoimien arvot kolmannen asteen yhtälön yleiseen ratkaisukaavaan. Antaako kertoimien sijoittaminen ratkaisukaavaan samat juuret kuin yhtälön ratkaiseminen suoraan?

**Vihje:** Kolmannen asteen yhtälön yleinen ratkaisukaava on sangen mutkikas eikä kaikissa tapauksissa anna ongelmitta oikeaa ratkaisua. Ratkaistaessa yhtälö suoraan saatetaan tarvita funktiota `ComplexExpand` saatujen juurten sieventämiseen.

**280.** Etsi yhtälön $x^4-2x^3+2x^2-6x-3=0$ juuret. Jaa yhtälön vasempana puolena oleva polynomi näiden avulla mahdollisimman alhaista astetta oleviin reaalisiin tekijöihin. Onko tulos sama kuin `Factor`-funktion antama?

**Vihje:** `Solve`-funktion antamasta korvauslistasta voidaan poimia $k$:s korvaussääntö joko hiiren avulla tai asettamalla listan nimen perään indeksi kaksinkertaisiin hakasulkuihin, esimerkiksi `ratk[[k]]`. Tulos voidaan saada myös `Factor`-funktiolla, mutta siinä tarvitaan lisäoptio; ks. Mathematican dokumentaatiota.

**281.** Ratkaise yhtälö $z^7+1=0$. Esitä juuret muodossa $z=x+iy$ ja tutki, miten kaukana origosta juuret sijaitsevat kompleksitasossa. Mitkä ovat juurten napakulmat?

**Vihje:** Sievennä juurten lausekkeet `ComplexExpand`-funktiolla. Kompleksiluvun itseisarvo saadaan funktiolla `Abs`, napakulmaan voidaan käyttää funktiota `Arg` (vaikka tulos kyllä näkyy muutenkin).

**282.** Ratkaise kompleksinen yhtälö $z^3-iz^2+2iz+(8-4i)=0$.

**Vihje:** Imaginaariyksikkö on `I`. Se voidaan myös valita paletista, jolloin symboli on hieman erinäköinen.

**283.** Tutki eri tapoja ratkaista itseisarvoyhtälö $|x-1|+|x-3|=3$ Mathematicalla.

**Vihje:** Itseisarvofunktio on `Abs`. Yhtälöön voidaan suoraan soveltaa yhtälöiden ratkaisemisessa käytettäviä komentoja itseisarvolausekkeita ensin purkamatta. Piirrä myös kuvio (`Plot`).

**284.** Ratkaise yhtälö $|3x+1|+|2x-3|=ax+|5x-7|$ käyttäen funktiota `Solve`; $a$ on jokin reaalinen vakio. Kokeile, toteuttavatko saadut juuret yhtälön.

**Vihje:** Voi olla hyödyksi tutkia yhtälön toteutumista antamalla $a$:lle sopivia arvoja. Itseisarvofunktio on `Abs`.

**285.** Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 4x + 5y = 2. \end{cases}$$

**Vihje:** `Solve`-funktion ensimmäisenä argumenttina voi olla usean yhtälön muodostama lista ja toisena usean tuntemattoman muodostama lista.

**286.** Ratkaise yhtälöryhmät

a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ 4x + 5y + 6z = 13 \\ 7x + 8y + 10z = 17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 13 \\ 7x + 8y + 9z = 17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 13 \\ 7x + 8y + 9z = 15 \end{cases}$

Montako ratkaisua yhtälöryhmillä on?

**Vihje:** Ryhmän rakennetta voi myös tutkia tarkemmin eliminoimalla esimerkiksi tuntemattoman $x$ kahdesta ensimmäisestä ja vastaavasti kahdesta jälkimmäisestä yhtälöstä. Tällöin on apua Mathematican funktiosta `Eliminate`.

**287.** Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - xy = 10 \\ ax - y = 5 \end{cases}.$$

Millä vakion $a$ arvoilla yhtälöparilla on reaalisia ratkaisuja?

**Vihje:** Ratkaise ensin yhtälöpari ja poimi hiirellä ratkaisusta ehto luvulle $a$. Epäyhtälöitä voidaan ratkaista funktiolla `Reduce`.

**288.** Ratkaise käyrien

$$16x^2 + 9y^2 + 24xy - 170x + 310y - 465 = 0 \quad \text{ja}$$
$$5x^2 + 8y^2 + 4xy - 32x - 56y + 80 = 0.$$

leikkauspisteiden koordinaatit. Vertaa tulosta käyrien kuvaajiin.

**Vihje:** Kumpi on järkevämpää: Hakea leikkauspisteiden koordinaateille tarkat arvot vai likiarvot? Kuvaajat voidaan piirtää funktiolla `ContourPlot`.

**289.** Ratkaise yhtälö $\ln(x^2+1) = \sqrt{x+1}$.

**Vihje:** Piirrä kuvio (`Plot`) ja selvitä sen avulla yhtälön juurten lukumäärä. Voidaanko juurille löytää tarkat arvot? Mitä yhtälönratkaisufunktioista `Solve`, `NSolve`, `FindRoot` voidaan käyttää? Miksi? Luonnollinen logaritmi on `Log`.

**290.** Ratkaise yhtälö $e^{-x} - \sin x = 0$. Piirrä tätä varten funktioiden $y = e^{-x}$ ja $y = \sin x$ kuvaajat samaan kuvioon. Määritä kolmen pienimmän juuren likiarvot. Montako juurta yhtälöllä on? Mitä voidaan sanoa näiden ratkaisemisesta a) algebrallisesti, b) numeerisesti?

**Vihje:** Funktiota `Solve` tai edes `NSolve` ei voida käyttää, koska kyseessä on transkendenttiyhtälö. Iteratiiviseen numeeriseen ratkaisemiseen (Newtonin menetelmän tapaan) on käytettävissä funktio `FindRoot`.

**291.** Etsi yhtälöparin $e^x + \sin y = 0$, $x^6 - xy + y^6 = 4$ juuret numeerisesti.

**Vihje:** Funktioita `Solve` ja `NSolve` ei voida käyttää, koska ne ratkaisevat vain algebrallisia yhtälöitä. Transkendenttinen yhtälö tai yhtälöryhmä voidaan ratkaista funktiolla `FindRoot`, joka oleellisesti käyttää yksi- tai useampiulotteista Newtonin menetelmää. Sopivien alkuarvojen löytämiseksi käyrät on syytä piirtää. Tällöin voidaan käyttää funktiota `ContourPlot`.

**292.** Osa tien kaarteesta on ympyrän kaari, joka kartalla kulkee $xy$-koordinaatiston pisteiden $(28, 98)$, $(70, 112)$ ja $(126, 84)$ kautta. Kuinka suuri on tämän ympyrän säde, kun yksikkö kartalla vastaa 25:tä metriä luonnossa?

**Vihje:** Ratkaise kolmen algebrallisen yhtälön ryhmä. Muodosta tätä varten ensin ympyrän yhtälö, jossa säde ja keskipisteen koordinaatit ovat tuntemattomia, ja sijoita siihen annetut arvot.

**293.** Määritä ympyröiden $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 10 = 0$ ja $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ leikkauspisteet, laske niiden etäisyydet origosta ja niiden keskinäinen etäisyys.

**Vihje:** Käytä `Solve`-komennon tuottamia korvaussääntöjä mahdollisimman tehokkaasti. Etäisyydet voi ehkä helpoimmin laskea vektoreiden pituuksina.

**294.** Kolmen pallon keskipisteet ja säteet ovat $(1, 1, 1)$, 3; $(1, 2, 3)$, 2; $(3, 2, 4)$, 4. Määritä pallojen yhteiset pisteet.

**Vihje:** Käytä funktiota `Solve` usean algebrallisen yhtälön muodostaman ryhmän ratkaisemiseen.

**295.** Kolmannen asteen polynomilla $p(x)$ on kaksinkertainen nollakohta $x = 2$ ja $p(3) = 15$, $p'(1) = 0$. Määritä $p(x)$.

**Vihje:** Muodosta polynomille lauseke tuntemattomin kertoimin ja johda kertoimille yhtälöryhmä ehtojen perusteella.

**296.** Määritä vakio $a$ siten, että yhtälön $x^4 - ax^2 + 2x + 1 = 0$ juurten neliöiden summa on 1. Mitkä ovat vastaavien juurten likiarvot?

**Vihje:** $a$ on yksinkertainen murtoluku; kaksi juurista on kompleksisia. Tehtävän voi laskea monella tavalla. Tutki, mitä antavat seuraavantyyppiset syötteet: `neliot= x^2/.Solve[...]`, `Apply[Plus,neliot]`.

## mplCurve fitting

**297.** mplCF01.tex [Matlab: ../../matlabteht/mlCurveFit/mplCF01.tex]

**Hermiten interpolaatio:** Interpolaatioehdoissa esiintyy myös derivaattoja.

Määritä 4. asteen polynomi $p$, joka toteuttaa ehdot:

$$p(0) = p'(0) = 1, p(1) = p'(1) = p''(1) = 2.$$

(a) Käsittele polynomi lausekkeena.
Tarkista tulos sopivasti `subs`-komennoilla ja piirrä kuva/kuvia polynomista ja derivaatoista.

(b) Käsittele polynomi funktiona.

**Huom:** 5 ehtoa ja 5 tuntematonta kerrointa $\Longrightarrow$ järkevän tuntuinen tehtävä. Yleisesti "järkevälläkään" Hermiten interpolaatiotehtävällä ei aina ole yksikäsitteistä ratkaisua (kuten ei neliömatriisin määräämällä lineaarisella yhtälöryhmälläkään – siitähän on kyse). Pelkkiä funktion arvoja koskevalla interpolaatiotehtävällä aina on (koska "Vandermonden neliömatriisi" on aina ei-singulaarinen).
Tässä opetellaan erityisesti Maplen kätevää ratkaisutekniikkaa.

**Vihje:** Kirjoita polynomi lausekkeeksi tyyliin:

`p:=a*x^4+b*x^3 + .... ,`
missä $a, b, \ldots, e$ ovat määrättävät kertoimet.

Derivaatta: `diff`
Arvojen (x=0,x=1) sijoittaminen p:n lausekkeeseen: `subs`
Yhtälön ratkaiseminen: `solve`

Kaikista saat tietoa näin `?diff`, ...

**298.** mplCF03.tex, [Matlab: ../../matlabteht/mlCurveFit/mlCF15.tex]

**Opettajalle**: *(a)-kohta sopii ensitutustumiseen.*
*(b)-kohta on sikäli huono, että virhetermin suuruusluokka on toisesta maailmasta (opettavaista kylläkin, mutta alkajaisiksi vaatii ainakin varoituksen).*
*Lisää tehtävän opetuksia ratkaisutiedostoissa.*

(a) Muodosta interpolaatiopolynomi pisteistölle, joka saadaan laskemalla funktion $\cos(1+x^2)$ arvot tasavälisessä x-pisteistössä, jossa on 7 pistettä välillä $[0,3]$.Piirrä samaan kuvaan funktio, datapisteet ja interpolaatiopolynomi.

(b) Arvioi (Lagrangen) interpolaatiokaavan virhetermin avulla interpolaatiovirheen yläraja yo. välillä ja vertaa todelliseen.

**Lause** Olkoot $x_0, x_1, \ldots, x_n$ erilliset pisteet ja $f$ $(n+1)$ kertaa jatkuvasti derivoituva funktio $x_k-$pisteet sisältävällä välillä. Jos $p_n$ on (1-käs) dataan $(x_k, f(x_k))$ liittyvä interpolaatiopolynomi, niin

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

**Vihje:** Tässä on mahdollista harrastaa Maplen ja Matlabin yhteistyötä. Virhekaavan derivaatta muodostetaan tietysti Maplella ja lauseke sievennetään. Itse asiassa piirtämällä ja poimimalla kuvasta maksimipisteen koordinaatit, saadaan riittävän hyvä arvio.
Toinen mahdollisuus on käyttää Matlabin symbolic toolboxia.

Tulotermin voisi hoitaa tehokkaimmin Matlabissa ottamalla tiheän diskretoinnin ja käyttämällä max-funktiota. Maplessakin on max-funktio, lakenta on Matlabissa tehokkaampaa.
Miten tulotermi lasketaan Matlabissa? Vaikka tähän tapaan:
1. `x=linspace(....,N)`
2. Tedään matriisi X, jossa x-vektoreita allekkain n+1 kpl.
3. Tehdään matriisi X0, jossa rivit

```
x0 x0 ... x0   N kpl.
x1 x1 ... x1   N kpl.
 ...
xn xn ... xn   N kpl.
```

Nämä syntyvät vaikka `meshgrid`-komennolla tai ulkotuloilemalla ykköspystyvektorilla.
4. Vähennetään matriisit ja `prod())`. Sitten vain `abs` ja `max` kehiin.

Tosi Matlabmaista! (Ei moitita, vaikka tekisit for-loopin, vain 8 kertaa käydään, mutta hyvä ymmärtää Matlabin hienoa matriisiajattelua, muistiahan ei nykyisin tarvitse säästellä.)

**Avainsanat:** Interpolaatio, käyrän sovitus, interpolaatiovirhe, Lagrange

**299.** mlCF07.tex/mplCF07.tex // Matlab,Maple,[Mathematica]

W.A Mozartin(1756-1791) sävellyksiä indeksoidaan Köchel-luvuilla, jotka ilmaisevat teosten sävellysjärjestyksen. Alla on eräitä Köchel-lukuja, ja vastaavien teosten sävellysvuosia.

| Number | Year |
|---|---|
| 1 | 1761 |
| 75 | 1771 |
| 155 | 1772 |
| 219 | 1775 |
| 271 | 1777 |
| 351 | 1780 |
| 425 | 1782 |
| 503 | 1786 |
| 575 | 1789 |
| 626 | 1791 |

Käyttäen tätä dataa, arvioi teoksen Sinfonia Concertanten sävellysvuosi, kun tiedetään, että sen Köchel-numero on 364.

**Vihje:** Piirrä ensin datapisteet tasoon, ja päätä millaista menetelmää kannattaa käyttää. Epäilemättä sopivan asteista PNS-polynomia. Suorita joitakin sovituksia, ja tarkista sitten tulos vaikka Wikipediasta.

**300.** Maple tai Matlab

Tutkitaan nk. Rungen ilmiötä. Laske funktion $g(x) = 1/(1+x^2)$ arvoja tasaisin välein väliltä $[-5, 5]$, ja tee näihin pisteisiin perustuva polynominen interpolaatio. Piirrä sekä $g(x)$ että $P(x)$ samaan kuvaan. Mitä huomaat, kun valittujen datapisteiden määrää tihennetään?

Kokeile interpolointia silloin, kun datapisteitä ei valita tasavälisesti, vaan ne valitaan Chebyshev-pisteiden

$$x_j = 5\cos(\frac{j\pi}{N}), j = 0 \ldots N$$

mukaan.

**Vihje:** Polynominen interpolaatio kannattaa tehdä MATLAB-funktiolla `polyfit`. Funktio $g$ kannattaa määritellä funktiokahvan avulla: `g = @(x)1./(1+x.^2)`. Tasavälisiä pisteistä saa funktiolla `linspace`

Sopii aivan yhtä hyvin Maplelle.

**301.** H2T14.tex/mlCF13.tex/mplCF13.tex
Matlab,Maple,[Mathematica]

Yhdysvaltojen perustuslaki vaatii, että maassa suoritetaan joka kymmenes vuosi väestönlaskenta. Ohessa on väestönlaskennan tuloksia sadoissa miljoonissa asukkaissa viime vuosisadalta.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1900 | 1910 | 1920 | 1930 | 1940 | 1950 | 1960 | 1970 | 1980 | 1990 |
| 76 | 92 | 106 | 122 | 132 | 150 | 179 | 203 | 226 | 248 |

Tee polynomi-interpolointi datalle, ja ennusta väestön määrä vuonna 2010. Kuinka ennusteesi suhtautuu laskennan todelliseen tulokseen: 308,745,538 laskettua asukasta?

Sovita myös eriasteisia PNS-polynomeja, vrt. Matlab Censusgui, lue Molerista: `http://www.mathworks.se/moler/interp.pdf`Num. Comp. with Matlab, interpolation

**Vihje:**

## Differentiaaliyhtälöt

**302.** mplD001.tex (infoverkostot (iv) s. 2001) Ratkaise yhtälö

$$\frac{dy}{dt} = ty$$

.

a.) Muodosta yleinen ratkaisu.

b.) Määritä vakio `_C1` alkuehdolle $y(0) = 1$.

c.) Ratkaise alkuarvotehtävä suoraan `dsolve`:lla.

**Vihje:** Maplen funktio `dsolve`.
b)-kohdassa voit ottaa ratkaisulausekkeen `rhs` (Righthand side) kiinni. Tarvitset lisäksi komentoja `subs` ja `solve`
c) `?dsolve`, [HAM] ss. 162-165

**Ratkaisu:**

```
 > dyht := diff(y(t), t) = t*y(t)
 a)
 > ylratk := dsolve(dyht, y(t))
 b)
 > Y := rhs(ylratk)
 > solve(subs(t = 0, Y) = 1, _C1)
 Huom! Dokumenttimoodissa alaviiva pudottaa kursorin alaindeksitasolle.
 "copy/paste" tarvitaan _C1:lle.
 > eval(%)
c)
 > dsolve({dyht, y(0) = 1}, y(t))
```

**303.** mplD002.tex (infoverkostot (iv) s. 2001)

Ratkaise differentiaaliyhtälö sijoittamalla ratkaisuehdotus (REh) annettuun yhtälöön tai esim. integroimalla, arvaamalla tms.:

(a) $y'+y = x^2-2$, REh: $y = Ce^{-x}+x^2-2x$ (b) $y''+y = 0$, REh: $y = a\cos x+b\sin x$
(c) $y''' = e^x$, (d) $x + yy' = 0$, REh: $x^2 + y^2 = C$ ($C > 0$, vakio).

**Vihje:** (d)-kohta: Derivoi implisiittisesti, ts. oleta, että on olemassa derivoituva funktio $x \mapsto y(x)$ s.e. $x^2 + y(x) = C$ ja derivoi puolittain. (Tässä tapauksessa olemassaolo tiedetään, onhan $y(x) = \sqrt{C - x^2}$ tällainen. Tämän eksplisiittisen lausekkeen käyttö ei silti kannata, se vain mutkistaa asioita, olkaamme siis implisiittisiä.)

**Ratkaisu:** mplD002R.mw ja .pdf ON

**304.** mplD003.tex [Matlab-versio: ...mlD002.tex] (iv3/2001, harj. 1, teht. 2)
Millä xy-tason käyrillä on ominaisuus: Käyrän tangentin kulmakerroin jokaisessa pisteessä $(x, y)$ on $-\frac{4x}{y}$ ?

Ratkaise yhtälö muuttujien erottelulla ("separation of variables"). Piirrä suuntakenttä isokliineja apuna käyttäen käsin vaikkapa alueessa $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

Ota sitten Maple avuksi. Kokeile ja selitä!

**Vihje:** Kts. [HAM] ss. 169-170

```
> with(DEtools)
> with(plots)
```

Suuntakenttään:*DEplot*,
grafiikkojen yhdistämiseen: *display*.
Suoraparven saat tyyliin

```
> yparvi:=seq(...,c=[-2,-1,-.5,.5,2,1]) # tms.
> isokl:=plot([yparvi],x=...)
```

Yleisemmin isokliinit saadaan piirretyksi *implicitplot*-funktiolla, mutta tässä saatiin ratkaistussa muodossa suoraan.

**Avainsanat:**MapleDy, diffyhtälöt, suuntakenttä, isokliinit, mplDifferentiaali(yhtälöt)

**Viitteet:** `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998

**305.** mplD004.tex [Matlab-versio: ...mlD004.tex] (iv3/2001, harj. 1, LV teht. 1-2)

Laskuvarjohyppääjän yhtälö. Oletetaan, että hyppääjän + varustuksen massa = $m$ ja ilmanvastus on verrannollinen nopeuden neliöön, olkoon verrannollisuskerroin = $b$. Tällöin Newtonin 2. laki antaa liikeyhtälön:

$$mv' = mg - bv^2.$$

Olkoon yksinkertaisuuden vuoksi $m = 1, b = 1$ ja $g = 9.81m/s^2$.

Piirrä suuntakenttä.

Oletetaan, että laskuvarjo aukeaa, kun $v = 10m/s$, valitaan tämä alkuhetkeksi $t = 0$. Piirrä tämä ratkaisukäyrä suuntakenttäpiirrokseen. Yritä nähdä suuntakentästä, että kaikki ratkaisut näyttävät lähestyvän rajanopeutta $v \approx 3.13$ ja että ratkaisut ovat joko kasvavia tai pieneneviä (ja millä alkuarvoilla mitäkin, ja mitä tarkoittaa fysikaalisesti)

Määritä rajanopeus suoraan yhtälöstä.

Käytä Matlab-piirroksiin funktiota `dfield8` ja Maplessa DEtools-kirjaston DEplot-funktiota.

**Vihje:** Kts. [HAM] ss. 169-170 tai `?DEplot`

```
> with(DEtools)
> with(plots)
```

Suuntakenttään:*DEplot*,
grafiikkojen yhdistämiseen: *display*.
dfield-ohje:
Hae m-tiedosto *dfield8* sivulta `http://math.rice.edu/~dfield/` ja sijoita se Matlab-polkusi varrelle.
Kirjoita Matlab-istuntoon : `dfield8`

**Avainsanat:** MatlabDy, MapleDy, diffyhtälöt, suuntakenttä, isokliinit, mplDifferentiaali(yhtälöt), mlDifferentiaali(yhtälöt)

**Viitteet:** `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998

**306.** mplD005.tex (iv3/2001, harj. 1, LV teht. 2)

Muodosta edellä olevan laskuvarjotehtävän (mplD004) analyyttinen ratkaisu muuttujien erottelulla. Määritä edellä mainittu ($v(0) = 10$)-ratkaisukäyrä. Tarkista ratkaisu Maplella ja kokeile lopuksi Maplen `dsolve`- komentoa. (Ohje [HAM]-kirjassa.)

**Vihje:** Ohje analyyttiseen: Muistathan, että osamurtohajoitelma on hyödyllinen rationaalilausekkeen integroinnissa (Maple: `convert(lauseke,parfrac,muuttuja);` mutta osattava myös käsin).

**Avainsanat:** MapleDy, diffyhtälöt, muuttujien erottelu, mplDifferentiaali(yhtälöt), mlDifferentiaali(yhtälöt)

**Viitteet:** `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998

**307.** mplD006.tex (iv3/2001, harj. 1, LV teht. 3)
Vaihdamme tässä LAODE-tyyliseen notaatioon: $t$ on riippumaton muuttuja, $x$ on “riippuva” muuttuja. Kannattaa totutella eri tyyleihin.

Ratkaise alkuarvotehtävä $x' = \frac{x}{2} - e^{-t}$, $x(0) = -1$. Kyseessä on *lineaarinen epähomogeeninen* (EHY). Tämä lasku ei edellytä mitään uutta muuttujien erottelun lisäksi (ainoastaan uskomista), kaikki on tässä neuvottu.

Suorita ratkaisu näin:

- Ratkaise ensin vastaava (HY) $x' = \frac{x}{2}$ (yleinen ratkaisu).
- Yritä keksiä jokin (EHY):n erityisratkaisu (siis mikä tahansa (EHY):n toteuttava). Keksiminen on helppoa, kun mietit exp-funktion derivointia. (Määräämätön kerroin ratkaistaan sijoittamalla yrite (EHY):yyn).

Lineaaristen teoria sanoo, että (EHY):n yleinen = (HY):n yleinen + (EHY):n erikoinen.

Piirrä myös suuntakenttä ja ratkaisukäyriä (Maple: DEtools[DEplot], Matlab: `dfield8 tai suuntak1`).
Miten näet suuntakentästä, että yhtälö ei ole autonominen?

**Avainsanat:** MapleDy, lineaariset diffyhtälöt, mplDifferentiaali(yhtälöt)

**Viitteet:** `[LAODE]` Golubitzky-Dellnitz: Linear Algebra and Differential Equations using Matlab, Brooks/Cole 1999.

**308.** mplD007.tex (iv3/2001, harj. 2, AV teht. 1)
Ratkaise (AA)-tehtävä $y' - 2xy = 1, \quad y(0) = -0.5$

Tässä näyttää siltä, että (EHY):n erikoinen olisi helppo löytää, mutta huomaat pian, että luonnolliset yritteet eivät toimi. (Kyseessähän on lineaarinen, mutta ei-vakiokertoiminen yhtälö.)

Ratkaise vaan sitten kiltisti integroivan tekijän menettelyllä.

Integrointi johtaa *erf*-funktioon, Maple antaa sen suoraan, voit myös konsultoida KRE-kirjaa hakusanalla *erf*. Lausu siis ratkaisu *erf*:n avulla.

Piirrä suuntakenttäpiirros Maplen `DEtools`-pakkauksen `DEplot`-funktion avulla (kts [HAM] s. 169), voit toki käyttää myös Matlab:n dfield8-funktiota (ohje alla).

Valitse alkuarvoja $y_0$ väliltä $(-1, -0.5)$ yrittäen löytää kriittistä arvoa $y_0$, joka jakaa ratrkaisukäyrät plus tai miinus ääretöntä lähestyviin. (Tuo kriittinen ratkaisukäyrä on rajoitettu.) Käytä hyväksesi *erf*-funktion ominaisuutta $\lim_{x\to\infty} erf(x) = 1$ laskeaksesi tarkan arvon $y_0$:lle.

**Vihje:** dfield-ohje: Hae m-tiedosto *dfield8* sivulta `http://math.rice.edu/~dfield/` ja sijoita se Matlab-polkusi varrelle.
Kirjoita Matlab-istuntoon : `dfield8`

**Avainsanat:** MapleDy, diffyhtälöt,erf, mplDifferentiaali(yhtälöt)

**Viitteet:** `[KRE]` E. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics, Wiley
`[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

**309.** mplD008.tex (iv3/2001, harj. 2, AV teht. 2)
Tarkastellaan (AA)-tehtävää $xy' = 4y, \quad y(0) = 1.$

(a) Osoita, että tehtävällä ei ole ratkaisua. Osoita, että tämä ei ole ristiriidassa $\exists_1$-lauseen kanssa. (Huom: Lauseen avulla *ei voi todistaa epäeksistenssiä*, koska lauseen ehdot eivä ole välttämättömät.)

(b) Vaihdetaan alkuehdoksi: $y(0) = 0$. Miten nyt on ratkaisujen laita.

(c) Mitä voit sanoa alkuehdon $y(x_0) = y_0$ tapauksessa, jos $x_0 \neq 0$,
(A) suoraan ratkaisukaavan avulla, (B) $\exists_1$-lauseen avulla.

**Vihje:** Tämä on puhtaasti “perinteinen” tehtävä, mutta havainnollistus Maple/Matlab-välineillä on hyvinkin paikallaan.

**Avainsanat:** diffyhtälöt, ratkaisun (epä)olemassaolo, eksistenssilause, mplDifferentiaali(yhtälöt)

**310.** mplD009.tex (iv3/2001, harj. 2, AV teht. 3)
Muodosta *Picardin* iteraatiojonon muutama termi (AA)-tehtäville

(a) $y' = x + y, \quad y(0) = 0$ (b) $y' = x + y, \quad y(0) = -1$
(c) $y' = y^2, \quad y(0) = 1.$

Määritä myös tarkka ratkaisu.

**Vihje:** LV-tehtävässä palataan asiaan Maple-hommana. Tämä on tyypillistä symbolilaskennan vahvuusaluetta.

**Avainsanat:** diffyhtälöt, ratkaisun (epä)olemassaolo, Picard-Lindelöf-menetelmä, Picardin iteraatio, mplDifferentiaali(yhtälöt)

**311.** mplD010.tex (iv3/2001, harj. 2, LV teht. 1)
Muodosta *Picardin* iteraatiojonoa pitemmälle kuin AV-tehtävässä samoille (AA)-tehtäville (a), (b), (c) ja lisäksi vielä (d): lle.

(a) $y' = x + y, \quad y(0) = 0$ (b) $y' = x + y, \quad y(0) = -1$
(c) $y' = y^2, \quad y(0) = 1.$ (d) $y' = 3\frac{y}{x}$

Laske myös tarkka ratkaisu Maplella ja piirrä se ja iteraatiojonon funktioita. (Jos tuntuu liian pitkältä, niin jätä yksi pois, hyvä olis saada kaikki yhteisesti katetuksi (vaikka parityöskentelyssä sopimalla).

**Vihje:** Malli: Aputiedostossa mplD010apu.zip on `L4Picard.mw`,`L4Picard.pdf`,`L4exa2.mw`, `L4exa2.pdf`, kts. myös [HAM] ss. 162–165 (`dsolve`)ja s. 126 *Picard–Lindelöf*

**Avainsanat:** diffyhtälöt, Picard-Lindelöf-menetelmä, Picardin iteraatio, mplDifferentiaali(yhtälöt)
**Viitteet:** `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

**312.** mplD011.tex

(a) Sovella *Picardin* iteraatiota (tuttuakin tutumpaan) (AA)-tehtävään

$y' = y, \quad y(0) = 1$. Osoita, että iteraatiojono lähestyy ratkaisufunktiota $y(x) = e^x$ .

(b) (Olkoon vaihteeksi $x(t)$ .)
Olkoon alkuarvotehtävänä edelleen $x' = x, \quad x(0) = 1$.

Osoita, että jos lasketaan likiarvo $x_n = x_h(t_n)$ EM:llä pisteessä $t = t_n$ käyttäen askelpituutta $h$, niin $x_h(t_n) = c(h)^{t_n}$, missä $c(h) = (1 + h)^{1/h}$.

Osoita tämän nojalla, että kiinteällä $t = t_n$ pätee $\lim_{h \to 0} x_h(t) = e^t$.

**Vihje:** Tehtävässä tuskin tarvitaan ohjelmistoja.
EM = *Eulerin menetelmä*

**313.** mplD012.tex

Seuraava toistokäsky soveltaa Eulerin menetelmää alkuarvotehtävän $y' = \sin(xy)$, $y(0) = 1$ ratkaisun likiarvon $y(1)$ laskemiseen. Kokeile käskyjä askelpituuksilla $h = 0.25, h = 0.1, h = 0.01$ ja $h = 10^{-4}$. Mikä menee pieleen viimeisessä kohdassa?

```
f:=(x,y)-> sin(x*y);
Digits:= 4;
n:= 4;
h:=1/n;
y[0] := 1;
for k from 0 to n-1 do      #  (paina tässä kohti Shift+Enter)
y[k+1]:= evalf(y[k]+h*f(k*h,y[k])) #    (samoin)
end do;
```

Piirrä Eulerin murtoviivat eri väreillä samaan koordinaatistoon.

**Vihje:** Datan piirto sujuu nykyisin "Matlab-tyylisesti":

```
> xlista:=[seq(j*h,j=0..n)];
> ylista:=[seq(y[j],j=0..n)]
> plot(xlista,ylista)
```

[HAM]-viitteessä ss. 94-96 esitetyt tavat pisteparien listana toimivat myös, mutta s. 96 zip-temppu ei ole enää tarpeen.

**Viitteet:** `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

**314.** mplD013.tex

Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' + 3y' + 3y = 1 - e^{-x}, y(0) = 2, y'(0) = 0,$$

ja piirrä ratkaisun kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 10$.

**Vihje:** Diffyhtälön saat ratkaistua komennolla `dsolve`. Yhtälössä esiintyvät derivaatat voit ilmoittaa komennolla `diff`, ja derivaatan pisteessa 0 voit ilmaista derivaattaoperaattorilla `D(y)(0)`.

**315.** mplD014.tex Maple,Matlab

a) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' - y = \cos x, \quad y(0) = 1$$

analyyttisesti Maplella ja numeerisesti Matlabilla. Piirrä ratkaisukäyrä.

b) Anna alkuarvoksi symboli $c$ ja piirrä ratkaisukäyräparvi sopivalla välillä, kun $c = -0.9, -0.8, \ldots, 0.$

Miltä parvi näyttää suurilla $x$ :n arvoilla. Tässä pitäisi erottua kolmenlaista käytöstä.

**Vihje:** Maple: dsolve, Matlab: ode45

**Avainsanat:** Differentiaaliyhtälö, alkuarvotehtävä, analyyttinen ratkaisu, numeerinen ratkaisu.

**Viitteet:**

Coombes et al: Differential equations with Maple, Wiley

Boyce - DiPrima's: Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems,Wiley

**316.** mplD015.tex Maple,Matlab
Tarkastellaan (AA)-tehtävää

$$y' = \frac{3t^2}{(3y^2-4)}, \quad y(1) = 0.$$

(a) Laske EM:llä ratkaisuapproksimaatiot pisteissä $t = 1.2, 1.4, 1.6, 1.8$ käyttäen askelta $h = 0.1$ .

(b) Tee sama askeleella $h = 0.05$ .

(c) Vertaa tuloksia.

(d) Piirrä suuntakenttä ja ratkaisuapproksimaatioita, sekä EM-ratkaisuja. Osaatko selittää, miksi EM toimii kohtuullisesti alussa, mutta kelvottomasti lopussa?

**Vihje:** Eulerin menetelmää voi tässä käyttää ohjelman (MMM) laskintyylillä, kuten edellä tai sitten oikeaksi funktioksi koodatulla versiolla, annetaan tässä nuo koodit.

Eulerin menetelmän koodit (sisältyvät myös apupakettiin *apu.zip):
Maple: [HAM s. 206] (copy/paste → Maple-istuntoon)

```
Euler:=proc(f,a,b,ya,m)
local n,h,t,y;
h:=evalf((b-a)/m);
t[0]:=a;y[0]:=ya;
for n from 0 to m do
  y[n+1]:=y[n]+h*f(t[n],y[n]);
  t[n+1]:=t[n]+h;
end do;
seq([t[n],y[n]],n=0..m);
end:
```

Esim: $y' = t - y^2$

```
f:=(t,y)->t-y^2;
e3:=Euler(f,0,5,1,3);
plot([e3]);
```

Matlab: (Kts. vastaava Matlab-teht.)

**Avainsanat:** Differentiaaliyhtälö, alkuarvotehtävä, analyyttinen ratkaisu, numeerinen ratkaisu.

**Viitteet:**
`[KRE]` E. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics, Wiley
`[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

**317.** mplD016.tex (vrt. Matlab: mlD007.tex)
Tarkastellaan (AA)-tehtävää

$$y' = \frac{2\sqrt{y - \ln t}}{t} + \frac{1}{t}, \quad y(1) = 0$$

välillä $t \in [1, 1.8]$ Ratkaise tehtävä

a) Eulerin menetelmällä askelpituudella $h = 0.1$,

b) Heunin menetelmällä askelpituudella $h = 0.2$,

c) RK4- menetelmällä askelpituudella $h = 0.4$.

Määritä tarkka ratkaisu Maple:n `dsolve`-komennolla ja laske sen avulla virheet, piirrä ja taulukoi kussakin tapauksessa.

Huomaa, että näillä askelpituuksien valinnoilla funktion arvojen laskentamäärät ovat samat.

**Vihje:** Eulerin menetelmän koodit (sisältyvät myös apupakettiin mplD016apu.zip):
Maple: [HAM s. 206] (copy/paste → Maple-istuntoon)

```
Euler:=proc(f,a,b,ya,m)
local n,h,t,y;
h:=evalf((b-a)/m);
t[0]:=a;y[0]:=ya;
for n from 0 to m do
  y[n+1]:=y[n]+h*f(t[n],y[n]);
  t[n+1]:=t[n]+h;
end do;
seq([t[n],y[n]],n=0..m);
end:
```

Esim: $y' = t - y^2$

```
f:=(t,y)->t-y^2;
e3:=Euler(f,0,5,1,3);
plot([e3]);
```

Laitetaan myös Heun ja RK4

Matlab: (Kts. vastaava Matlab-teht.)

**Huom:** Tästä voi kehitellä monenlaisia tehtävävariaatioita, myös ilman numeeristen menetelmien korostusta.

**Avainsanat:** Differentiaaliyhtälö, alkuarvotehtävä, analyyttinen ratkaisu, numeerinen ratkaisu.

**Viitteet:**
[KRE] E. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics, Wiley
[HAM] Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

**318.** mplD017.tex, mlD007.tex

Huomasimme, että eksponentiaalinen kasvumalli, ns. *Malthus'n laki* $y' = ky$ ei toimi USA:n väestödataan pitkällä aikavälillä. Mallia voidaan tarkentaa lisäämällä sopiva kasvua rajoittava termi, tällöin johdutaan ns. logistiseen kasvulakiin:

$$y' = ay - by^2$$

USA:n väestödataan liityen *Verhulst* arvioi v. 1845 arvot $a = 0.03$ ja $b = 1.610^{-4}$, kun $t$ mitataan vuosissa ja väkiluku $y(t)$ miljoonissa.

**Opettajalle:** Tehtävä voidaan käsitellä ehkä luontavamminkin kokonaan erillisenä numeeristen diffyhtälöratkaisujen opetuksesta. Tällöin otetaan vain alla olevat kohdat (c) ja/tai (d).

(a) Ratkaise tehtävä ($y(0) = 5.3$) Eulerin menetelmällä käyttämllä askelpituussa $h = 10$

(b) rk4:llä käyttäen n. nelinkertaista askelta (voit kokeilla pienempiäkin)

(c) Matlabin `ode45`:llä.

(d) Laske analyyttinen ratkaisu Maplella (kyseessähän on *Bernoullin yhtälö.*

Piirrä kuvia ja laske kaikissa tapauksessa ratkaisujen arvot annetuissa taulukkopisteissä. (ode45-tapauksessa onnistuu ainakin sovittamalla dataan splini funktiolla spline, joka on maailman helppokäyttöisin.)
kts. `http://www.math.hut.fi/teaching/v/matlab/opas.html#splinit`
(Nykyään (2012) ei tarvita erillistä splinisovitusta, laskentapisteet voidaan antaa suoraan ode45-funktiolle syötteenä.)

**Vihje:**

```
function [T,Y]=eulerS(f,Tspan,ya,n)
% Tämä vain kehittely- ja opettelutarkoituksessa.
% Funktio eulerV hoitaa niin skalaari- kuin vektoriversion.
%  (24.2.04, modifioitu 21.8.2010)
% Esim: y'=t+y, y(0)=1
%       f=@(t,y)t+y
%       [T,Y]=eulerS(f,[0 4],1,6), plot(T,Y,T,Y,'.r');shg
a=Tspan(1);b=Tspan(2);
h=(b-a)/n;
Y=zeros(n+1,1);T=(a:h:b)'; %Pystyvektorit yhdenmukaisesti ode45:n
Y(1)=ya;                   %  kanssa
for j=1:n
   Y(j+1)=Y(j)+h*f(T(j),Y(j));
end;
```

## Viitteitä:

`http://math.aalto.fi/opetus/kp3-ii/06/L/L14dynumkalvot.pdf`
`http://www.math.hut.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/esim/eulerS.m`
(Listaus yllä)

**319.** mplD018.tex, mlD008.tex
Tarkastellaan yhtälöä $y' = -2\alpha(t-1)y$. Ratkaise aluksi analyyttisesti (saat käyttää Mapleakin.)

Totea kuvasta ja derivaattaehdosta yhtälön stabiilisuus/epästabiilisuusalueet. Ota kuvassa ja aina tarvittaessa vaikkapa $\alpha = 5$.
Ratkaise yhtälö sekä Eulerilla että BE:llä. Sopivia arvoja voisivat olla vaikkapa $h = 0.2$, väli: $[1, 4.5]$, $y(1) = 1$.
Vertaa kokeellisesti stabiilisuukäyttäytymistä teorian ennustamaan ja pane merkille, miten epästabiilisuus käytännössä ilmenee.
Tämä tehtävä soveltuu erityisen hyvin Maplella tehtäväksi, se on pitkälle ideoitu [HAM] sivulla 124, myös Euler ja BE ovat valmiina. (Koodit saa kurssin maple-hakemistosta.) ** Tulee aputiedostoon **

** apu puuttuu, editoi viitteet! **

**Vihje:**

**Viitteitä:**

`http://math.aalto.fi/opetus/kp3-ii/06/L/L14dynumkalvot.pdf`
`http://www.math.hut.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/esim/eulerS.m`
(Listaus yllä)

**320.** mplD019.tex [mplP017.tex]
Opiskelija ottaa lainaa 10000 euroa hetkellä $k = 0$ ja ryhtyy maksamaan sitä takaisin kuukauden päästä hetkellä $k = 1$. Kuukausikorko on 1% (huh!) ja takaisinmaksu tapahtuu kiintein maksuerin 450 EUR/kk

Olkoon $y_k$ $k$:n kuukauden kuluttua jäljellä olevan velan määrä. Kirjoita differenssiyhtälö $y_k$:lle.

Muodosta taulukko ja graafinen esitys, jossa on pisteet $(k, y_k)$, ja selvitä sen perusteella, miten kauan velan maksu kestää ja miten paljon rahaa opiskelijaparka käyttää koko projektiin.

Luokittelu: Differenssi- ja differentiaaliyhtalot, Maple-perusteet.

**Vihje:**

**321.** Ratkaise yhtälö $\frac{dy}{dt} = ty$.

**Vihje:** Maplen funktio `dsolve`.

**322.** a) Osoita, että funktio $\arctan \frac{y}{x}$ toteuttaa *Laplacen osittaisdifferentiaaliyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(Tällaisia funktioita sanotaan *harmonisiksi funktioiksi.*)

b) Oletetaan, että funktioilla $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on jatkuvat toiset osittaisderivaatat ja ne toteuttavat ns. *Cauchy-Riemannin* yhtälöt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Osoita, että $u$ ja $v$ ovat harmonisia.

c) Olkoon $f(x, y) = x^3y^2 + x^4 \sin y + \cos(xy)$. Laske osittaisderivaatat $f_{xxy}$, $f_{xyx}$, $f_{yxx}$ ja totea, että ne ovat samat.

**323.** Seuraava toistokäsky soveltaa Eulerin menetelmää alkuarvotehtävän $y' = \sin(xy)$, $y(0) = 1$ ratkaisun likiarvon $y(1)$ laskemiseen. Kokeile käskyjä askelpituuksilla $h = 0.25, h = 0.1, h = 0.01$ ja $h = 10^{-4}$. Mikä menee pieleen viimeisessä kohdassa?

```
f:=(x,y)-> sin(x*y);
Digits:= 4;
n:= 4;
h:=1/n;
y[0] = 1;
for k from 0 to n-1 do  (paina tässä kohti Shift+Enter)
y[k+1]:= y[k]+h*f(k*h,y[k]) (samoin)
od;
```

**Vihje:**

**324.** Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' + 3y' + 3y = 1 - e^{-x}, y(0) = 2, y'(0) = 0,$$

ja piirrä ratkaisun kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 10$.

**Vihje:** Diffyhtälön saat ratkaistua komennolla `dsolve`. Yhtälössä esiintyvät derivaatat voit ilmoittaa komennolla `diff`, ja derivaatan pisteessa 0 voit ilmaista derivaattaoperaattorilla `D(y)(0)`.

**325.** Maple,Matlab (H2T10)

a) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' - y = \cos x, \quad y(0) = 1$$

analyyttisesti Maplella ja numeerisesti Matlabilla. Piirrä ratkaisukäyrä.

b) Anna alkuarvoksi symboli $c$ ja piirrä ratkaisukäyräparvi sopivalla välillä, kun $c = -0.9, -0.8, \ldots, 0$.

Miltä parvi näyttää suurilla $x$ :n arvoilla. Tässä pitäisi erottua kolmenlaista käytöstä.

**Vihje:** Maple: dsolve, Matlab: ode45

**Avainsanat:** Differentiaaliyhtälö, alkuarvotehtävä, analyyttinen ratkaisu, numeerinen ratkaisu.

**326.** Kirjoita heiluriyhtälö $\Theta'' + \frac{g}{L}\sin(\Theta) = 0$ ensimmäisen kertaluvun systeemiksi, tai toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi. Voit ottaa $g/L = 1$.

Laske ratkaisu sopivalla aikavälillä (esim. $[0, 10]$) ja kolmella erilaisella alkuarvolla, joilla saat erityyppiset ratkaisut.

Piirrä ratkaisukäyrät aikatasoon ja trajektorit faasitasoon.

**327.** Ratkaise RA-tehtävä

$$y'' = y^2 - 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Maplella. Yritä ensin analyyttista. Jos/kun mitään ei palaudu, voit asettaa esim `infolevel[dsolve]:=3:`. Näet ainakin, mitä Maple yrittää.
Siirry sitten tyyppiin `numeric`, homma sujuu ongelmitta.

Muutaman kokeilun jälkeen huomasin, ettei sujukaan. Numeerisen ratkaisun määritteleminen parametrista riippuvaksi funkioksi on aikamoista temppuilua, tällaisella kurssilla ei kannata siihen paneutua, koska Matlab-ratkaisu on hyvin selkeä ja ongelmaton.

**Muutetaan tehtävä helpommaksi:**

Suorita Maplella suoraan reuna-arvotehtävän ratkaisu (luultavasti Maple laskee sen differessimenetelmällä). Syntaksi on aivan sama kuin alkuarvotehtävälle, nyt vain annetaan pelkät reunaehdot.

Helpin esimerkkien avulla pääset kiinni ratkaisufunktioon.

**328.** a) Osoita, että funktio $\arctan \frac{y}{x}$ toteuttaa *Laplacen osittaisdifferentiaaliyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(Tällaisia funktioita sanotaan *harmonisiksi funktioiksi.*)

b) Oletetaan, että funktioilla $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on jatkuvat toiset osittaisderivaatat ja ne toteuttavat ns. *Cauchy-Riemannin* yhtälöt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Osoita, että $u$ ja $v$ ovat harmonisia.

c) Olkoon $f(x, y) = x^3y^2 + x^4 \sin y + \cos(xy)$. Laske osittaisderivaatat $f_{xxy}$, $f_{xyx}$, $f_{yxx}$ ja totea, että ne ovat samat.

## Differentiaali- ja integraalilaskenta

**329.** mplDi001.tex ([HAM] ss. 48-50)
Funktiolausekkeen derivaatta muodostetaan `diff`-komennolla.
Määritä seuraavien funktioiden 1. ja 2. derivaatta ja sievennä tulokset `simplify`-komennolla.

$6x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ , $\frac{x+1}{x^2+1}$ , $\cos(x^2 + 1)$ , $\arcsin(2x + 3)$ , $\sqrt{1 + x^4}$ , $\arctan x$

**Vihje:** Voit myös kirjoittaa lausekkeen työarkille, koskettaa sitä hiiren oikealla “context sensitive” näppäimellä, jolloin saat joukon Maple-komentoja, mm. diff, simplify ym.

**Luokittelu, avainsanat**: Mapleperusteet, Maplediffint, lauseke, symbolinen derivointi, diff

**Viitteet:**

`[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

**330.** mplDi002.tex
Olkoon $f(x) = x^2 - 4$. Muodosta integraalifunktiot

$$\int f(x)\,dx, \quad \int \frac{dx}{f(x)}.$$

Tarkista tulokset derivoimalla.

**Vihje:** int ja Int. Voit myös aloittaa: int <ESC-näppäily>, saat valikon, josta valitset $\int$-merkin ja täydennät luonnollisen tapaan. Käytä simplify-komentoa tarvittaessa.

**Luokittelu, Avainsanat:** Maplediffint, int,Int,Mapleperusteet

.

**331.** mplDi003.tex
Määritä seuraavat integraalit:

$$\int_0^\infty e^{-t}\,dt \text{ ja } \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt.$$

**Vihje:** Ääretön: *infinity*. Huom: Voit kirjoittaa int(ESC), saat valikon, josta voit valita määrätyn integraalimerkin, rajojen paikalle kirjoitat sopivasti, ylärajan voit aloittaa infi(ESC), jolloin Maple antaa taas valikon, josta voit valita $\infty$-symbolin.
Toki voit kirjoittaa “vanhan hyvän ajan tapaan” int(f,t=0..infinity).

**332.** mplDi004.tex

**Huom!** Alla jotkin kaavat html-sivulla epäselviä, suositus: avaa pdf-tiedosto (ellet jo avannut).

Laske seuraavat integraalit. Määräämättömien integraalien tapauksessa tarkista tuloksesi derivoimalla. Määrätyissä integraaleissa, joista Maple ei suoriudu voit käyttää numeerista integrointia. Laske joitakin esimerkkejä (kuten h-kohta) "symbolisesti" ja sitten tulokselle numeerinen likiarvo ja toisaalta suoraan numeerisesti.

Huomaa, että ns. "suljettu muoto" on nykyisin epämääräinen käsite, sillä useat "perinteisesti mahdottomat" integraalit voidaan lausua Maple:n tuntemien erikoisfunktioiden (kuten *erf*) avulla.

- a) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ b) $\int x \cos x^2 dx$
- c) $\int sin 3x\sqrt{1-\cos 3x} dx$ d)$\int \ln x dx$
- e) $\int x^2\sqrt{x+4} dx$ f) $\int_0^1 \sqrt{x^4+1} dx$
- g) $\int_0^{\pi} e^{\cos x} dx$ h) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

**Vihje:** **Integrointi**komento on `int`. Lisäksi on komennon muoto `Int`, joka on ns. "hidas muoto" `int`:stä ("inert function").

**Numeerinen integrointi** saadaan aikaan yhdistelmällä `evalf(Int(...))` tai `int(,...,numeric)`.

Muoto `evalf(int(...))` yrittää ensin symbolista, ja evaluoi tuloksen. Jos symbolinen ei onnistu, integroi numeerisesti. Siksi saattaa olla paljon tehottomampi numeeriseen integrointiin.

**Avainsanat:** mapleDiffint, symbolinen integrointi, numeerinen integrointi,erf

**333.** mplDi005a.tex (PA, P1, tharj. 2, s. 2011)

Harjoituksessa käytetään Maple-ohjelmaa. Toisen harjoituksen tavoitteena on syventää tietoja funktioiden käsittelystä: aiheina ovat mm. derivointi, maksimointi, yhtälöiden ratkaiseminen (ja iterointi jos jää aikaa). Avaa Viikkoharjoitukset-sivulla oleva työarkki ja käy läpi siinä olevat esimerkit ja tehtävät. Sen jälkeen voit siirtyä alla oleviin tehtäviin, mikäli aikaa riittää.

1. Klikkaa hiirellä Viikkoharjoitukset-sivun tiedostoa maple2.mw (tässä `http://www.math.hut.fi/opetus/Mattie/MattieT/mplteht/mplDiffint/mplDi005aPohja` ja avaa se Maple-ohjelmalla. Käy läpi työarkin tehtävät ja siirry sen jälkeen alla oleviin tehtäviin.

2. Putoavan kappaleen nopeus $v = v(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $mv'(t) = mg - kv(t)^2$, jos positiivinen suunta on **alaspäin** ja ilmanvastus on verrannollinen nopeuden neliöön kertoimella $k > 0$.
a) Osoita, että funktio
$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\, t\right)$$
toteuttaa vaaditun differentiaaliyhtälön.
b) Mikä on rajanopeus $\lim_{t\to\infty} v(t)$?
Vihje: `simplify`-käsky ei tee sievennyksiä aivan loppuun, koska se ei tiedä, ovatko $m, g, k$ positiivisia. Lisää käsky `assume(m>0 and k>0 and g>0)` ja kokeile sievennystä sen jälkeen.

3. Kuulantyönnön tulos riippuu kuulan alkunopeudesta $v$, lähtökorkeudesta $h$ ja työnnön suuntakulmasta $x$ seuraavan lausekkeen mukaisesti:
$$f(x) = \frac{v\cos x\left(v\sin x + \sqrt{v^2\sin^2 x + 2hg}\right)}{g},$$
missä $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Käytetään SI-järjestelmän yksiköitä ja oletetaan, että $h = 2$, $v = 14$ ja $g = 9.81$. Määritä työnnön optimaalinen suuntakulma ja maksimitulos.

   Kannattanee edetä seuraavien vaiheiden mukaan:

- Määrittele $f$ funktiona; älä sijoita lukuarvoja tässä vaiheessa, niin voit tarkistaa, että lauseke on oikein.
- Sijoita lukuarvot $h, v, g$.
- Piirrä funktion $f$ kuvaaja välillä $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ ja tarkista, että se näyttää järkevältä. (Yleinen virhe: kertomerkkejä puuttuu!)
- Ratkaise maksimi kokeilemalla molempia tapoja: suoraan `maximize` TAI muodosta yhtälö $f'(x) = 0$, ratkaise numeerisesti `fsolve`-käskyllä, laske maksimi.
- Muuta saatu kulma asteiksi ja mieti, onko tulos järkevä.

**Avainsanat:** mplDiffint, PeruskurssiP1, putoavan kappaleen diffyhtalo, differenti-

**334.** mplDi005.tex
Maple, Mathematica , Matlab (erityisesti b)-kohta).

Laske integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{13 - 12\cos 2x}\, dx$$

a) symbolisesti, b) numeerisesti. Piirrä integroitavan funktion kuvaaja. Mikä itse asiassa on integraalin arvo?

**Vihje:**

**Mathematica:**
Symbolinen integrointi tapahtuu funktiolla `Integrate`, numeerinen funktiolla `NIntegrate`. Jälkimmäisessä sovelletaan suoraan jotakin numeerisen integroinnin menetelmää, jonka valintaan myös käyttäjä voi vaikuttaa. Ks. dokumentaatiota, erityisesti Implementation Notes.

**Maple:**
Symbolinen integrointi tapahtuu funktiolla `int`, numeerinen funktiolla `int(...,type=numeric)` tai `evalf(Int(...))`. Numeerisessa sovelletaan suoraan jotakin numeerisen integroinnin menetelmää, jonka valintaan myös käyttäjä voi vaikuttaa.
Esim: `evalf(Int(f, x = 0 .. 2, digits = 20, method = _Dexp))`

**Matlab:**
Integrandi määritellään funktioksi (helpoimmin funktiokahvaksi "function handle"). Sitten quad-alkuiset Matlab-funktiot.

**Luokittelu**:
`mplteht/mplDiffint/mplDixx.tex`, `matlabteht/mlDiffint/mlDixx.tex`
`mmateht/mmaDiffint/mmaDi100`
**Avainsanat:**
Symbolinen integrointi, numeerinen integrointi, funktiot, lausekkeet

**Ratkaisu:** ON (mplDi005R.mw, mplDi005R.pdf)

**Viitteet:**

`http://math.tkk.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/m-files.html` (Matlab:n funktiokahva, function handle)

.

**335.** mplDi006.tex (Maple, Mathematica)
Laske integraali

$$\int \sqrt{x^4 - 2}\, dx$$

Yritä sieventää tulosta (äläkä masennu, kun ei sievene). Derivoi, sievennä ja hämmästy!

**Vihje:** Funktiot `int` (ja `Int`).
Tehtävä näyttää kovin viattomalta, mutta tulos voi yllättää ja lisätä kunnioitusta Maplen kykyihin. Samalla näkyy, että integroinnin ns. "suljettu muoto" on nykyohjelmissa huomattavasti laajentunut entisajoista.

**Luokittelu, avainsanat:** MapleDiffint, integrointi, erikoisfunktiot

**336.** mplDi007.tex
`[Isr]` s. 46

Ilmapallon tilavuus kasvaa nopeudella $10cm^3/s$. Millä nopeudella säde kasvaa hetkellä, jolloin pallon pinta-ala on $200cm^2$?

**Vihje:** Periaate: $V(t) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3$, $A(t) = 4\pi r^2$. Derivoidaan: $V'(t)$ = lauseke, jossa esiintyy $r(t)$ ja $r'(t)$ (implisiittinen derivointi). Tästä saadaan yksi yhtälö, josta voidaan ratkaista $r'$ $V'$:n (tunnettu) ja $r$:n avulla. $r$ saadaan pinta-alaehdosta.

Voit aloittaa vaikka näin:

```
V:=(4/3)*Pi*r(t)^3; A:=4*Pi*r(t)^2;
yht1:=10=diff(V,t);yht2:=200=A;
```

Huomaa, että `diff` soveltaa implisiittistä derivointia tuntemattomaan funktioon $r(t)$.

**Ratkaisu:**

```
> V := (4/3)*Pi*r(t)^3;
> A := 4*Pi*r(t)^2;
> yht1 := 10 = diff(V, t);
> yht2 := 200 = A;
> r1 := solve(yht2, r(t));
> r1 := max(r1); # Valitaan pos.
> dr := solve(yht1, diff(r(t), t));
> subs(r(t) = r1, dr);
```

**Luokittelu, avainsanat:** MapleDiffint, implisiittinen dervointi

**Viitteet:** `[Isr]` Robert Israel: Calculus: The Maple Way, Addison Wesley

**337.** mplDi008.tex
Missä pisteissä *Cartesiuksen lehden* $x^3 + y^3 = 3xy$ tangentin suuntakulma jonkin koordinaattiakselin suhteen on $= 45°$ ? Piirrä sekä käyrä että ko. tangentit (ainakin joku tangentti).

**Vihje:** Implisiittinen derivointi ja numeerinen yhtälön ratkaisu `fsolve` lienevät paikallaan. Huomaa, että `diff` soveltaa implisiittistä derivointia tuntemattomaan funktioon $y(x)$ (tai $x(y)$).

**Luokittelu, avainsanat:** MapleDiffint, implisiittinen derivointi, yhtälön numeerinen ratkaisu, fsolve

**338.** mplDi009.tex (Maple, Mathematica)
Muodosta funktion $f(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ ensimmäinen ja toinen derivaatta. Piirrä funktion ja derivaattojen kuvaajat.

**Vihje:** Derivaatat ovat aluksi todella sotkuisia. Käytä komentoa `simplify` siistiäksesi tulostusta. Kuvat saattavat yllättää ja johdatella pohtimaan, miksi?

**Ratkaisu:**

```
(Poista kommentit ...)
%> f := x -> arctan(sqrt((1-cos(x))/(1+cos(x))))
%> plot(f(x),x=-2*Pi..2*Pi)
%> df := diff(f(x), x)
%> df:=simplify(df)
%> plot(df,x=-Pi..Pi)
%> d2f:=diff(df,x)
%> simplify(%)
```

**Luokittelu, avainsanat:** diff, simplify, plot,diffint1, peruskurssi1

**339.** mplDi010.tex
Määritä funktion $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 1]$.

Käytä symboliohjelmissa perinteistä “diffistekniikkaa” kuvan kanssa, Matlab:ssa raakaa “numeronmurskausta” tyyliin: `linspace, plot, zoom`, uusi `linspace` kapeammalla välillä, `find`, ...

**Vihje:** arcsin on Mathematicassa `ArcSin`, Maplessa `arcsin` ja Matlabissa `asin`.
Symbolilaskentaohjelma saattaa johtaa oikeaan tulokseen puutteellisin perustein, jos tarkkoja ollaan.

**Ratkaisu:** Tämän kohdan ratkaisulinkissä Maple-ratkaisu, Matlab-ratkaisu vastaavassa Matlab-kohdassa (../../matlabteht/mlDiffint/mlDi010R.m ja .pdf)

**Avainsanat:** Diffint1,max/min, ääriarvot,peruskurssi1

**340.** mplDi011.tex
**Ohjelmat**: Maple,Mathematica
Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrät $y^2 = x$ ja $x - y = 3$.

**Vihje:** Mieti, kumpi on helpompaa: integrointi x- vai y-suunnassa.

**Ratkaisu:** mplDi011.pdf (pdf-tiedosto),
mplDi011.mw (Maple ws)
...mmateht/mmaDiffint/mmaDi107R.nb (Mma-notebook)
**Luokittelu**:
`mplteht/mplDiffint/mplDi011.tex`, `mmateht/mmaDiffint/mmaDi107.tex`
**Avainsanat:**
Pinta-ala, integraali,diffintperusteet,peruskurssi1.

**341.** mplDi012.tex
(Maple,Mathematica)
Määritä ellipsin $9x^2+16y^2 = 144$ sisään piirretyn (akselien suuntaisen) suorakulmion maksimaalinen pinta-ala. Piirrä ellipsi ja suorakulmio.

**Ratkaisu:** Maple: mplDiffint/mplDi012R.mw
mplDiffint/mplDi012R.pdf

**Avainsanat:** Diffint1, ääriarvot, peruskurssi1,diffintperusteet

**342.** mplDi013.tex
(Mathematica,Maple)
Määritä funktion

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x}$$

integraalifunktio ja piirrä sen kuvaaja. Onko tämä jatkuva? Pitäisikö sen olla jatkuva? Laske funktion integraali jakson $[0, 2\pi]$ yli a) integroimalla analyyttisesti komennolla `Integrate`, b) integroimalla numeerisesti komennolla `NIntegrate`, c) muodostamalla ensin integraalifunktio komennolla `Integrate` ja sijoittamalla rajat tähän korvausoperaattoria käyttäen.

**Vihje: Mathematica:**
Komennolla `Integrate` lasketaan sekä integraalifunktio että määrätty integraali. Numeeriselle integroinnille (määrätyn integraalin laskemiseen) on komento `NIntegrate`. Korvausoperaattori on `ReplaceAll` eli `/.` .

**Maple:** Integrointi: int, "hidastusmuoto": Int.

Numeerinen integrointi: `int(lauseke,x=a..b,numeric)`.

Arvon (a) sijoittaminen lausekkeen (F) muuttujaan (x): `subs(x=a,F)`

**Ratkaisu:**

```
> f := 1/(2+sin(x))  # (Työarkilla matem. notaatio)
> F:=int(f,x)
> plot(F,x=0..2*Pi)  # Oho, integroimisvakiot ei yhteensopivat.
> subs(x=2*Pi,F)-subs(x=0,F)
> simplify(%)       # Ei voi olla, integroitava pos. koko välillä
> int(f,x=0..2*Pi)
> evalf(%)
> int(f,x=0..2*Pi,numeric)
```

**343.** mplDi014.tex
(Mathematica,Maple)
Laske kardioidin $r = 1 + \cos\varphi$ kaarenpituus. Piirrä kuvio. Miten saat kardioidin kuvan oikeanmuotoiseksi? Tuntuuko saamasi pituus uskottavalta?

**Vihje:** Kaarenpituusintegraali: $\int ds = \int \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2}\, d\varphi$.

**344.** mplDi015.tex
Laske kaksinkertainen integraali

$$\int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} x\sqrt{1+y}\, dy\, dx.$$

Laske tarkka arvo sekä likiarvo.

**Vihje:** Huom: Maplessa voit kirjoittaa integraalit, neliöjuuret ym. matemaattisena notaationa.

Tässä kaksoisintegraalissa syntyy jostain syystä oikeannäköisen matemaattisen kaavan kanssa vaikeaselkoinen virhe:
Error, unable to parse integral ... . Kyse on differentiaalitermin tulkintavaikeudesta.

Perusnotaatio (`int(int(...))`) toimii varmasti.

**Ratkaisu:**

```
> int(int(x*sqrt(1+y), y = -x^2 .. x^2), x = 0 .. 1)
> evalf(%)
```

**Avainsanat:** diffint2, kaksinkertainen integraali, peruskurssi2

**345.** mplDi016.tex
Osoita, että funktio

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

toteuttaa Laplace yhtälön $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$.

**Vihje:** Laske osittaisderivaatat `diff`-komennolla. Tulos ei todennäköisesti suoraan anna nollaa, vaan kaipaa sieventämistä. Käytä tähän komentoa `simplify`.

**Ratkaisu:**

```
> f := 1/sqrt(x^2+y^2+z^2)
> diff(f, x, x)+diff(f, y, y)+diff(f, z, z)
> simplify(%)
```

**Avainsanat:** diffint2, osittaisderivaatta, Laplacen yhtälö, peruskurssi2

**346.** mplDi017.tex

a) Osoita, että funktio $\arctan \frac{y}{x}$ toteuttaa *Laplacen osittaisdifferentiaaliyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(Tällaisia funktioita sanotaan *harmonisiksi funktioiksi.*)

b) Oletetaan, että funktioilla $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on jatkuvat toiset osittaisderivaatat ja ne toteuttavat ns. *Cauchy-Riemannin* yhtälöt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Osoita, että $u$ ja $v$ ovat harmonisia.

c) Olkoon $f(x, y) = x^3y^2 + x^4 \sin y + \cos(xy)$. Laske osittaisderivaatat $f_{xxy}$, $f_{xyx}$, $f_{yxx}$ ja totea, että ne ovat samat.

**Ratkaisu:** mplDiffint/mplDi017R.mw ja .pdf

**Avainsanat:** Osittaisderivaatta, harmoniset funktiot, sekaderivaatat yhtyvät, diffint2, peruskurssi2

**347.** mplDi018.tex

Approksimoi numeerisesti kahden desimaalin tarkkuudella polun

$$\gamma(t) = (cos(4\pi t), t^2), t \in [0, 1]$$

pituutta. Idea on, että jaat välin $[0, 1]$ $n$ kappaleeseen tasapituisiä välejä, ja lasket näiden välien päätepisteitä vastaavien koordinaattien etäisyydet yhteen. Näin jakoa tihentämällä summan pitäisi lähestyä oikeaa pituutta. Muista, että saat tarkan pituuden laskemalla

$$\int |\gamma'(t)|dt$$

**Vihje:**

**348.** mplDi019.tex
Mat-1.1410 Matematiikan peruskurssi P1, syksy 2011, Pekka Alestalo

Harjoituksessa käytetään Maple-ohjelmaa. Viimeisen harjoituksen tavoitteena on tutustua integraalilaskentaan ja ratkaista siihen liittyvä sovellettu tehtävä. Lopuksi tutustutaan työarkin esimerkkien avulla jonojen, listojen ja matriisien käsittelyyn, jos jää aikaa.

**Tarkista oman ryhmäsi aika ja paikka. Ota mukaasi (tämän paperin lisäksi) Viikkoharjoitukset-sivun Maple-pikaohje. Myös aikaisempien kierrosten malliratkaisut kannattaa kerrata.**

1. Käy läpi edellisen kerran tehtävä 3 Noppa-sivun malliratkaisun avulla, ellet ehtinyt tehdä sitä viimeksi.

2. Klikkaa hiirellä Viikkoharjoitukset-sivun tiedostoa maple3.mw (puuttuu tästä toistaiseksi) ja avaa se ohjelmalla Maple 15. Käy läpi esimerkit ja laske annetut integraalit.

3. Työarkilla on annettu katenaariin eli ketjukäyrään liittyvä tehtävä, jossa etsitään sellaisen köyden muotoa, jonka pituus on 6 ja jonka päät on kiinnitetty pisteisiin $(0, 1)$ ja $(3, 2)$. Käy läpi esimerkkilaskut väärästä yrityksestä paraabelin $y = g(x) = Ax^2 + Bx + C$ avulla ja ratkaise sitten tehtävä oikean lausekkeen
$$y = f(x) = \frac{1}{a}\cosh(a(x - b)) + c$$
avulla. Ehdot tulevat siis muotoon $f(0) = 1,\ f(3) = 2$ ja
$$\int_0^3 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = 6.$$
Piirrä lopuksi funktioiden $f$ ja $g$ kuvaajat samaan kuvaan ja vertaa tuloksia.

**Hyödyllisiä vihjeitä:**

- Kursoria ei tarvitse siirtää rivin loppuun ennen Enter-käskyä!
- Nuolinäppäimillä voi siirtyä yläindeksistä pois; samoin murtolausekkeissa.
- Pikanäppäimiä:
  **Ctrl + Delete** poistaa käsky- tai tulosrivin
  **Ctrl + t** siirtyy tekstitilaan
  **F5** siirtyy tekstitilassa kaavankirjoitustilaan ja takaisin
  **Ctrl + k** tekee uuden käskyrivin kursorin yläpuolelle
  **Ctrl + j** tekee uuden käskyrivin kursorin alapuolelle
  **Ctrl + l** (l = label) liittää viittauksen aikaisemman tuloksen numeroon

**Vihje:**

**349.** mplDi020.tex
Integroi rationaalifunktiot:

$$\text{a)}\quad \frac{x}{2x^2-3x-2} \qquad \text{b)}\quad \frac{x^5+4}{(x^2+2)^2}$$

Saat käyttää Maplea apuna, mutta komennot `convert(lauseke,parfrac,x)` (puhumattakaan `int` :stä) ovat kiellettyjä muuhun kuin tarkistukseen. Katso mallia Maple-työskentelyyn vaikkapa `/p/edu/mat-1.414/L2000/inttekn.mws`:stä. Tehtävien ei pitäisi olla kohtuuttomia kokonaan käsinkään laskettaviksi.

** Linkki tuskin toimii, tee apu.zip **

**Vihje:**

**Viitteitä:** Tämä ja seuraavat n. 10 teht. kokoelmasta ... v2-3/H/harj2.tex (** Nootti systeemin rakentajalle(HA) **)

**350.** mplDi021.tex
Tynnyrin korkeus on $h$, pohjaympyrösöiden säteet $a$ ja keskikohdalta otetun poikkileikkausympyrän säde $b$ ($a < b$). Laske tynnyrin tilavuus, kun sivulaudat kaartuvat paraabelin muotoisesti.

**Vihje:** Sopii käsinlaskuun ja Maple/Mathematica-harjoitteluun.

**Avainsanat:** mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1

.

**351.** mplDi022.tex
Laske sen alueen pinta-ala, joka on ympyrän $r = a$ sisäpuolella, mutta *Bernoullin lemniskaatan* $r^2 = 2a^2 \cos 2\phi$ ulkopuolella.

**Vihje:** Sopii käsinlaskuun ja Maple/Mathematica-harjoitteluun.

**Avainsanat:** mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1

**352.** mplDi023.tex
Laske asteroidin $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ koko pituus. Piirrä mielellään sekä Maplella (tai Mma:lla) että Matlabilla.

**Vihje:** Sopii käsinlaskuun ja Maple/Mathematica(/Matlabkin)-harjoitteluun.

**Avainsanat:** mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1

**353.** mplDi024.tex
Ketjukäyrän $y = a\cosh\frac{x}{a},\ \ |x| \leq a$ pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyy katenoidiksi kutsuttu pinta. Laske sen ala ja piirrä kuva (sopivalla a:lla).

**Vihje:** Sopii käsinlaskuun ja Maple/Mathematica(/Matlabkin)-harjoitteluun.

**Avainsanat:** mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1

**354.** mplDi025.tex
Määritä ne $p$:n arvot, joilla seuraavat integraalit suppenevat ja määritä suppenevien integraalien arvot.

$$\text{a)}\quad \int_1^\infty x^{-p}dx \qquad \text{b)}\quad \int_0^1 x^{-p}dx$$

**Vihje:** Sopii käsinlaskuun ja Maple/Mathematica(/Matlabkin)-harjoitteluun.

**Avainsanat:** mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1

**355.** mplDi026.tex
Selvitä, suppeneeko $\int_0^1 \ln x dx$. Integrointiin voit käyttää Maplen `int`-komentoa. Tarjoile ongelma Maplelle raja-arvona, johon sovellat `limit`-funktiota. Selvitä tuloksen oikeellisuus.

**Vihje:**

**Avainsanat:** mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1

**356.** mplDi027.tex
Eulerin Γ-funktio määritellään kaavalla

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x > 0$$

a) Osoita, että integraali suppenee aina kun $x > 0$.

b) Johda osittaisintegroimalla palautuskaava $\Gamma(x)$:lle $\Gamma(x-1)$:n avulla ja osoita sitä käyttäen, että $\Gamma(n+1) = n!$, kun $n = 0, 1, 2, \ldots$ .

c) Tutustu Gamma-funktioon piirtämällä Maplella tai Matlabilla. Huomaa, että Matlabissa ei ole (ollut) muuta tapaa $n!$:n laskemiseen kuin Gamman avulla. Pikku tarkennus (v. 2012): No, tokihan voi laskea: `prod(1:n)`, mutta uudemmissa versioissa on myös *factorial*.

**Vihje:** a)- ja b)-kohdat käsinlasku(pää-päättely)tehtäviä.

**Avainsanat:** mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1

**357.** mplDi028.tex (Maple,Matlab)
Selvitä, miksi seuraava Matlabin komentojono antaa exp-funktion (0:ssa muodostetun) Taylorin $n$-asteisen polynomin kertoimet.

```
n=10,c=1:n,c=gamma(c+1),c=1./c,c=[1,c]
```

Huomaa, että kertoimet ovat kasvavan potenssin mukaan, joten jos/kun halutaan laskea `polyval`-funktiolla arvoja, on tehtävä `y=polyval(fliplr(c),x);`

a) Piirrä exp-funktio ja sen Taylorin polynomit $T_k(x, 0)$, arvoilla $k = 1 \ldots 10$ .

b) Suorita Maple-komento
`seq(eval(subs(x=0,diff(exp(x),x$k) )),k=1..5);` Se antaa varmasti idean, miten Maplen ja Matlabin yhteistyöllä voi kätevästi laskea minkä tahansa funktion Taylorin polynomeja $x$-vektorissa. Muodosta tällä tavoin joidenkin funktioiden Taylor-polynomitaulukoita ja kuvia.

c) Muodosta ja piirrä edellisiä suoraan Maplella .

d) Kirjoita edellä olevat ideat (pieneksi, 2–3 komentoa) funktioksi `taypolkert`, joka yksinkertaisesti ottaa argumentikseen (Vaikkapa Maplella saatavan ) derivaattajonon, jossa siis käsiteltävän funktion derivaatat on laskettu kehityskeskuksessa. Funktion tulee palauttaa Taylorin polynomin kerroinjono. (Laskentapiste ei näy Matlab-funktiossa argumenttina, se tulee mukaan jo Maple (tai kynä/paperi)-vaiheessa.) Palauta kertoimet alenevien potenssien mukaan, siis “polyval-sopivasti”. Alku voisi olla tällainen:

```
function kertoimet=taypolkert(derjono)
% Lasketaan Taylorin polynomin kertoimet. Asteluku määräytyy
%    derjonon pituudesta
% derjono: [f(x0),f'(x0),f''(x0),...]
% pisteet, joissa lasketaan
```

Testaa funktiotasi ainakin samoilla kuin ennen funktion tekoa. Voi tietysti olla, että haluat mieluummin kirjoittaa funktion muodossa `function y=taypol(derjono,x)` . Tällöin polyval on mukana ja arvot lasketaan siis vektorissa $x$. No, tee miten haluat!

**Vihje:**

**Avainsanat:** mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1,Taylorin polynomi,Matlabdiffint

**358.** mplDi029.tex (Maple,Matlab)
Laske sopivaa Taylorin polynomia ja siihen liittyvää virhetermiä hyväksi käyttäen likiarvo integraalille

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{x^2}dx$$

siten, että virheen itseisarvo on korkeintaan $10^{-6}$. Tarkoitus on laskea Taylorin kaavan jäännöstermin avulla, kuinka korkea asteluku tarvitaan, jotta virheraja varmasti alitetaan.

Vertaa laskemaasi approksimaatiota Maplen `evalf(Int(..));` - komennon antamaan arvoon.

Pohdittavaksi: Onko Taylorin polynomin käyttö hyvä numeerisen integroinnin menetelmä? Missä tapauksessa on ja missä ei?

**Vihje:**

**Avainsanat:** mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1,Taylorin polynomi,Matlabdiffint

**359.** mplDi030.tex (Maple,Matlab)
Muodosta lemniskaatan $r^2 = \cos 2\phi$ kaaren pituuden lauseke. Voit integroida välillä $[0, \pi/4]$ ja kertoa tuloksen 4:llä.

Kokeile integroida Maplella, kenties tulos on hieman yllättävä, laske numeerinen approksimaatio `evalf`:lla.

Suorita `with(student):` ja kokeile funktioita `trapezoid` ja `simpson`. Huomaa, että integroitava on singulaarinen päätepisteessä, joten näillä täytyy jättää väli hieman vajaaksi. Pääsetkö lähelle oikeaa tulosta näillä välineillä. Katso myös kuvia, niin integrandista kuin integraalifunktiostakin (Niin, Maple osaa tosiaankin sellaisen muodostaa!)

**Vihje:**

**Avainsanat:** mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1,Taylorin polynomi,Matlabdiffint,numeerinen integrointi

**360.** Selitä, miksi näin saadaan exp-funktion katkaistu Taylorin sarja. Suorita sitten Maplella tämäntyylistä:

```
> series(exp(x), x = 0, 10);  # tai taylor(...);
> p:=convert(%,polynom);
> c:=coeffs(p,x);
> evalf(%);
```

Selitä, mitä näissä tapahtuu. (Tutki tarvitessasi helpillä komentoja niin Matlabissa kuin Maplessa.)

Piirrä ja taulukoi tulokset.

**Vihje:**

## mplGrafiikka

**361.** Tiedosto: mplG001.tex
Piirrä funktion $f(x) = sin(8x) + sin(9x)$ kuvaaja.

**Vihje:** Tarkastele riittävän pitkää väliä

**362.** mplG002.tex

a.) Suorita `plot(1/x,x=-1..1);` Miten saisit kuvan näyttämään paremmalta?

b.) Kokeile datan piirtoa tähän tapaan

```
h:=0.01: xy=seq([k*h,1/(k*h)],k=1..100);
 plot([xy])
```

(Data annettu xy-pisteiden listana.)

c.) ja myös:

```
x:=[seq(k*h,k=1..100)]: y:=map(z->1/z,x);
plot(x,y)
```

(Matlab-tyylinen datan piirto (uusissa Maple-versioissa.))

d.) Kokeile nyt sitä Matlab-piirtoa vertailuksi viimeksi mainittuun:

```
h=0.01; x=h:h:1;
plot(x,1./x)
```

**Vihje:** a)-kohtaan:
( `?plot,options` ). Etsi `options`-luettelosta `discont=true-` kohta. Kokeile myös, mitä `discont(1/x,x);` vastaa.

**363.** mplG009.tex

Kun suoritat komennon `with(plots):` saat käyttöösi mm. funktiot `contourplot` ja `implicitplot`.

Kokeile vaikkapa `contourplot(x^2+y^2,x=-5..5,y=-5..5)` ja
`implicitplot(x^2+y^2=1,x=-1..1,y=-1..1)`

Piirrä funktion $f(x,y) = y\ln x + x\ln y$ korkeuskäyriä pisteen $(1,1)$ ympäristössä. Piirrä erityisesti se, joka kulkee pisteen $(1,1)$ kautta.

Klikkaa hiirellä kuvaa ja etsi käyrältä piste, joka on lähellä pistettä $(1,1)$. Seuraa pisteen koordinaatteja työkalunauhan vasemmasta laatikosta.

**364.** [Matlab,Maple,Mathematica] (Vihjeet ja ratkaisut tässä vain Matlab/Maple.)

Piirrä pintakuva ja korkeuskäyräpiirros funktiosta

$$f(x,y) = \sin(3\,y - x^2 + 1) + cos(2\,y^2 - 2\,x).$$

Ota alueeksi vaikka `[-2 2 -1 1]` .

**Vihje:**

1) **Matlab**
Käyttäjän täytyy itse muodostaa koordinaattihila ja sen pisteissä korkeusarvomatriisi Z. Tämä hoituu "teho-operaattorilla"`meshgrid`, johon kannattaa panostaa muutenkin.
Korkeusarvomatriisi Z tehdään kahden muuttujan funktiolle tähän tapaan:

```
x=linspace(a,b,m); y=linspace(c,d,n); % m ja n luokkaa 30.
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=f(X,Y);
```

(Kokeile periaatetta pienillä, hiukan erikokoisilla matriiseilla X,Y.)
Tässä funktion f on toimittava pisteittäisin operaatioin. Jos vaikka $f(x,y) = x^2 - y^2$, niin kirjoitettaisiin:

```
Z=X.^2 - Y.^2;
```

Pintoihin **mesh(x,y,Z), surf(x,y,Z), ...** Kokeile myös *colorbar* yms.

Matlabilla korkeuskäyriin *contour* , voit myös kokeilla *ezcontour*-funktiota. Mahdollisuus on kokeilla myös korkeuskäyrien valitsemistapoja, *clabel.*

**Älä diskretoi liian hienoksi.** Linspacessa 100 on ihan liikaa, n. luokkaa 30 olkoon lähtökohta.

2) **Maple:**
Helpompaa, koska hila tehdään ohjelman toimesta. Tulos ei aivan niin loistava kuin Matlabissa. (Osin tosin varsin hienoa tämäkin, ja “context sensitive”).

```
with(plots):
plot3d(f(x,y),x=a..b,y=c..d);
contour(f(x,y),x=a..b,y=c..d); # Tarkista!
```

**Luokittelu**:
`mplteht/mplGrafiikka/mplGxx.tex`, `matlabteht/mlGrafiikka/mlGxx.tex`
**Avainsanat:**
3D-grafiikka, pinta, pinnat, korkeuskäyrät, korkeuskayrat

**365.** [Matlab,Maple,Mathematica] (Vihjeet ja ratkaisut tässä vain Matlab/Maple.)

Piirrä pintakuva ja korkeuskäyräpiirros funktiosta

$$f(x,y) = \sin(3\,y - x^2 + 1) + cos(2\,y^2 - 2\,x).$$

Ota alueeksi vaikka `[-2 2 -1 1]` .

**Vihje:**

1) **Matlab**
Käyttäjän täytyy itse muodostaa koordinaattihila ja sen pisteissä korkeusarvomatriisi Z. Tämä hoituu "teho-operaattorilla"**meshgrid**, johon kannattaa panostaa muutenkin.
Korkeusarvomatriisi Z tehdään kahden muuttujan funktiolle tähän tapaan:

```
x=linspace(a,b,m); y=linspace(c,d,n); % m ja n luokkaa 30.
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=f(X,Y);
```

(Kokeile periaatetta pienillä, hiukan erikokoisilla matriiseilla X,Y.)
Tässä funktion f on toimittava pisteittäisin operaatioin. Jos vaikka $f(x,y) = x^2 - y^2$, niin kirjoitettaisiin:

```
Z=X.^2 - Y.^2;
```

Pintoihin **mesh(x,y,Z), surf(x,y,Z), ...** Kokeile myös *colorbar* yms.

Matlabilla korkeuskäyriin *contour* , voit myös kokeilla *ezcontour*-funktiota. Mahdollisuus on kokeilla myös korkeuskäyrien valitsemistapoja, *clabel.*

**Älä diskretoi liian hienoksi.** Linspacessa 100 on ihan liikaa, n. luokkaa 30 olkoon lähtökohta.

2) **Maple:**
Helpompaa, koska hila tehdään ohjelman toimesta. Tulos ei aivan niin loistava kuin Matlabissa. (Osin tosin varsin hienoa tämäkin, ja “context sensitive”).

```
with(plots):
plot3d(f(x,y),x=a..b,y=c..d);
contour(f(x,y),x=a..b,y=c..d); # Tarkista!
```

**Luokittelu**:
`mplteht/mplGrafiikka/mplGxx.tex`, `matlabteht/mlGrafiikka/mlGxx.tex`
**Avainsanat:**
3D-grafiikka, pinta, pinnat, korkeuskäyrät, korkeuskayrat

**366.** mplGxx.tex, mlGxx.tex (H2T6.tex )
Matlab,Maple,Mathematica

$$f(x, y) = \sin(3\,y - x^2 + 1) + cos(2\,y^2 - 2\,x).$$

Piirrä pintakuva ja korkeuskäyräpiirros.

Ota alueeksi vaikka `[-2 2 -1 1]` .

**Vihje:** Tutustu samalla `Matlabin meshgrid`:n toimintaan.
Korkeusarvomatriisi Z tehdään kahden muuttujan funktiolle tähän tapaan:

```
>> x=linspace(a,b,m); y=linspace(c,d,n); % m ja n luokkaa 30.
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> Z=f(X,Y);
```

(Kokeile periaatetta pienillä, hiukan erikokoisilla matriiseilla X,Y.)
Tässä funktion f on toimittava pisteittäisin operaatioin. Jos vaikka $f(x, y) = x^2 - y^2$, kirjoitettaisiin:
`Z=X.^2 - Y.^2;`

Pintoihin `mesh(x,y,Z), surf(x,y,Z), ...` Kokeile myös `colorbar` yms.

Matlabilla korkeuskäyriin `contour` , voit myös kokeilla `ezcontour`-funktiota. Mahdollisuus on kokeilla myös korkeuskäyrien valitsemistapoja, `clabel`.

**Älä diskretoi liian hienoksi.** Linspacessa 100 on ihan liikaa, n. luokkaa 30 olkoon lähtökohta.

**Maple:** Helpompaa, mutta tulos ei aivan niin loistava kuin Matlabissa. (Osin tosin varsin hienoa tämäkin, ja "context sensitive").

```
> with(plots):
> plot3d(f(x,y),x=a..b,y=c..d);
> contour(f(x,y),x=a..b,y=c..d); # Tarkista!
```

**Luokittelu**:
`mplteht/mplGrafiikka/mplGxx.tex`, `matlabteht/mlGrafiikka/mlGxx.tex`
**Avainsanat:**
3D-grafiikka, pinta, pinnat, korkeuskäyrät, korkeuskayrat

## mplIntegraalimuunnos

**367.** mplI001.tex

Laske määritelmän perusteella seuraavien funktioiden Laplace-muunnokset ja ilmoita muunnosfunktion määrittelyalue.
Saat hyödyntää Maplea integroinneissa, mutta kirjoita kuitenkin ainakin jokunen osittaisintegrointikaava ensin käsin. Rajankäynnit tulee päätellä ilman Maplea.

a) $f(t) = t^2$, b) $f(t) = te^{-t}$,

c) $f(t) = \cos at$ d) $f(t) = \sin at$

**Vihje:**

**Luokittelu**:

**Avainsanat:**

**Ratkaisu:**

**Viitteet:**

**368.** mplI002.tex

Laske Laplace-muunnokset (samaan tyyliin kuin edellä).

a) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [1,2] \\ 0, & t \notin [1,2] \end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

**Vihje:** `[HAM] ss. ...`

**Luokittelu**:

**Avainsanat:**

**Ratkaisu:**

**Viitteet:** `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

## mplKompleksi

**369.** mplK001.tex
**Maple-ohjeita muutamaan seuraavaan tehtävään**

```
plot, seq, map, subs, with(plots), complexplot, plot3d
```

seuraavassa x**plot**y tarkoittaa mitä tahansa piirtofunktiota.

```
with(plots):       # Ladataan lisägrafiikkakirjasto
kuva1:=xploty(...): # Kuvan tallettaminen muuttujaan.
kuva2:=xploty(...): #  ... ja toinen.
display(kuva1,kuva2);  # Näin yhdistetään grafiikkoja.

F:=2*x+exp(x*y); # Lausekkeen arvo muuttuu, kun x ja y muuttuvat.
             # MUTTA:  F(x,y) tai F(a,b) on vailla mieltä!
             # Jos halutaan laskea F:n arvo, kun x=a, y=b, komennetaan:
subs(x=a,y=b,F);

f:=(x,y)-> 2*x+exp(x*y);  # Funktiomääritys.
f(a,b)   # toimii nyt.
```

Lisää tähän omia ohjeitasi/poista tarpeettomia!

**Avainsanat:** Maple-ohjeita, mapleohjeet.

**370.** mplK002.tex
Lausu *De Moivre'n kaavaa* hyödyntäen $\cos 3\varphi$ ,$\cos 4\varphi$ ja $\sin 5\varphi$ $\cos\varphi$:n ja $\sin\varphi$:n avulla.

**Vihje:** Sopii käsinlaskuksi, mutta voidaan hyödyntää myös Maplea.

**Avainsanat:** Kompleksiluvut, De Moivre'n kaava, trigonometriset yhtälöt.

**371.** mplK003.tex
Käsinlasku
Kompleksiluvulla $e^{i\alpha}$ kertominen suorittaa kierron kulman $\alpha$ verran. Tämähän on vanha C1-tuttu olio, tason $\mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus, jolla niin ollen on matriisiesitys. Johda kiertokuvauksen matriisiesitys muodostamalla tulo $w = e^{i\alpha}z$, $z = x + iy = re^{i\Theta}$

Pieni ("vapaaehtoinen") jatko-osa:

Tästä on helppo yleistää mielivaltaisella kompleksiluvulla $Re^{i\alpha}$ kertomiseen. Miten kuvausta voi sanoin kuvailla ?

**Avainsanat:** Kompleksiluvut, tason kiertokuvaus.

**372.** mplK004.tex

Ykkösen n:nsien juurien käsittelyä varten määrittele Maple-funktio

```
w:=(k,n)->exp(I*2*k*Pi/n);
```

Piirrä yksikköympyrä ja kaikki $\sqrt[n]{1}$:t joillakin $n$:n arvoilla.

Laadi sitten Maple-skripti, jolla voidaan laskea ja piirtää syötteenä annetun mielivaltaisen kompleksiluvun kaikki n:nnet juuret.

```
> z:=2+3*I : n:=10:   % Muuteltava syöterivi
> juuret:=seq(w(k,n),k=0..n-1);
> ? complexplot
```

Huomaa, että $e^{i\Theta}$, $\Theta \in [0, 2\pi)$ "piirtää" yksikköympyrän. `complexplot` on juuri reaalimuuttujan kompleksiplotti.

Kts. tarkemmin
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/2/02/H/complex6.html`

Tässä pikatietoisku kompleksiluvuista:

`http://www.math.hut.fi/opetus/Mattie/MattieO/Luentomatskua/kompleksianalyysi/kompluvut.html`

**Avainsanat:** Kompleksiluvut, ykkösen juuret, complexplot

**373.** mplK002.tex

Lausu *De Moivre'n kaavaa* hyödyntäen $\cos 3\varphi$ ,$\cos 4\varphi$ ja $\sin 5\varphi$ $\cos\varphi$:n ja $\sin\varphi$:n avulla.

**Vihje:** Sopii käsinlaskuksi, mutta voidaan hyödyntää myös Maplea.

**Avainsanat:** Kompleksiluvut, De Moivre'n kaava, trigonometriset yhtälöt.

## mplLineaarialgebra

**374.** mplLi001.tex
Ratkaise yhtälöryhmä

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

kun

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -13 & -13 & -2 & 7 \\ 18 & -4 & 30 & -1 & -12 \\ -23 & 3 & 7 & 15 & 7 \\ 9 & 36 & -1 & 14 & 16 \\ 3 & 28 & 7 & 14 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -196 \\ 435 \\ 11 \\ 111 \\ 195 \end{bmatrix}$$

**Vihje:** Matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

voi syöttää joko vaakavektoreita päällekkäin latomalla:

$$A := << a|b|c >, < d|e|f >>$$

tai pystyvektoeita vierekkäin:

$$A := << a, d > | < b, e > | < c, f >> .$$

**375.** mplLi002.tex
Muodosta Maplessa matriisi

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Määrittele aliakset vihjeen mukaan.

(b) Muodosta karakteristinen polynomi suoraan määritelmän mukaan hyödyntäen aliaksia *Det,Id*.
(c) Muodosta karakteristinen polynomi LinearAlgebra-kirjaston `CharacteristicMatrix` ja `Determinant`-komentojen avulla.
(d) Sovella `factor`-komentoa polynomiin (sattuu onnistumaan), ja ratkaise puuttuvat juuret `solve`-komennolla.
e) Näppäise hiirellä matriisia A ja paina oikeaa painiketta. Valitse Eigenvalues, ja voit kokeilla muitakin.

**Vihje:** Lataa kirjasto ja määrittele alias-nimet pitkille nimille:

```
> with(LinearAlgebra)
> alias(Det=Determinant,chmat=CharacteristicMatrix,Id=IdentityMatrix)
```

**376.** mplLi003.tex

Tutustu tähän: `http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/02/L/LA.html`, voit ottaa vastaavan `.mws`:n pohjaksi. Kirjoita viitteen `http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/00/L/G-J.html` Maple-työ `LinaerAlgebra`-tyylillä, `LA.mws/html`:n mallin mukaisesti. Tarkista rivioperaatiot `ref-` ja `rref`-aliaksia käyttäen. Selvitä ratkaisujen "lukumäärä" (olemassaolo ja mahd. vapaiden parametrien määrä). Tarkista lopuksi komennolla `LinearSolve`.

**Vihje:** Maplessa on kaksi lineaarialgebrakirjastoa: vanhempi linalg ja uudempi LinearAlgebra. Tässä tehtävässä opetellaan uudemman käyttöä (se on mm. matriisien osien käsittelyn kannalta selkeämpää, selvästi Matlab-vaikutteista). Samalla opitaan/kerrataan oikeaa asiaa liittyen lineaaristen yhtälösysteemien perusoppiin.

**377.** mplLi004.tex

Nyt emme enää harjoittele rivioperaatioilla laskemista, vaan kaikissa on lupa käyttää `ref/rref`-aliasoituja funktioita.

Määritä kanta $\mathbb{R}^5$:n aliavaruudelle, jonka virittävät vektorit $\mathbf{v_1} = (1, 1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{v_2} = (0, 2, 0, 1, -1)$, $\mathbf{v_3} = (0, -1, 1, 0, 2)$, $\mathbf{v_4} = (1, 4, 1, 2, 1)$, $\mathbf{v_5} = (0, 0, 2, 1, 3)$.

Jos Aatu saa tulokseksi jotkin vektorit ja Öhky saa jotkin toiset (saman määrän sentään toivottavasti), niin miten selvität, kumpi on oikeassa vai kenties kumpikin?

**Vihje:**

```
with(LinearAlgebra)
alias(ref=GaussianElimination,rref=ReducedRowEchelonForm)
```

**378.** mplLi005.tex

Olkoon $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, ja merkitään sarakevektoreita $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_5}$.
Olkoon $B = [\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_4}]$.

(a) Selvitä, miksi $\mathbf{a_3}$ ja $\mathbf{a_5}$ kuuluvat B:n sarakeavaruuteen col(B).
(b) Määritä nolla-avaruuden N(A) kanta.
(c) Olkoon $T : \mathbb{R}^5 \mapsto \mathbb{R}^4$ $A$:n määräämä lineaarikuvaus, ts. $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ (ts. $T = L_A$). Selvitä, miksi $T$ ei ole injektio eikä surjektio.

**Vihje:**

```
with(LinearAlgebra)
alias(ref=GaussianElimination,rref=ReducedRowEchelonForm)
```

**379.** mplLi006.tex

Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 11 \end{bmatrix}$

(a) Määritä sarakeavaruuden kanta.
(b) Määritä riviavaruuden kanta.
(c) Määritä nolla-avaruuden (ytimen) dimensio.
(d) Tarkista dimensioita koskevan peruslauseen toteutuminen.

**Vihje:**

```
with(LinearAlgebra)
alias(ref=GaussianElimination,rref=ReducedRowEchelonForm)
```

**380.** mplLi007.tex

(a) Olkoon $A$ $m \times n$-matriisi ja $Ab = [A\mathbf{b}]$ liitännäismatriisi. Lausu (välttämätön ja riittävä) ehto rangien $r(A)$ ja $r(Ab)$ avulla sille, että yhtälösysteemillä $Ax = b$ olisi ratkaisu(ja) (eli on konsistentti).

(b) Osoita, että $m \times n$-matriisille $A$ pätee $r(A) + n(A^T) = m$

**Vihje:** Puhdas käsinlasku.

**381.** mplLi008.tex

(a) Osoita, että monomit $1, x, x^2, \ldots, x^n$ ovat `LRT` $\mathbb{R}$:ssä. (b) Osoita, että ne ovat `LRT` myös jos määritelyjoukkona on mikä tahansa väli $[a, b]$.

(Tietysti riittää tehdä pelkkä (b), niinhän.)

Tapoja on monia: (a)-kohdassa vektoriyhtälö voidaan derivoida toistuvasti ja laskea 0:ssa. Tai voidaan käyttää LRV-lemmaa ja todeta raja-arvokäytöksen perusteella, että $x^k$ ei voi yhtyä alemmanasteiseen polynomiin.

(b)-kohta hoituu ainakin polynomien tekijöihinjaolla (ei haittaa, vaikka tulee kompleksilukuja mukaan). Eräs tapa olisi osoittaa, että ns. Vandermonden matriisi on aina kääntyvä (sarakkeet LRT). (Toisaalta tämä tulee sivutuotteena, jos käytämme jotain muuta tapaa.) Kyseessä on matriisi, joka saadaan, kun monomit $1, x, \ldots x^n$ lasketaan $n + 1$:ssä pisteessä $x_0, \ldots, x_n$ (Pisteet vaakasuuntaan, potenssit pystysuuntaan.) Maplen `LinearAlgebra`:ssa on `VandermondeMatrix` .

(c) Piirrä monomien kuvaajia vaikkapa välillä $[-1, 1]$ ja yritä nähdä kuvasta lineaarinen riippumattomuus. Piirrä monomeja isoilla peräkkäisillä parillisilla (tai parittomilla) $n$:n arvoilla ja totea "melkein LRV". Tämä ilmenee numeerisessa laskennassa esim. interpolaatiopolynomin tapauksessa "häiriöalttiutena".

**Vihje:** Puhdas käsinlasku, paitsi c)-kohta.

**382.** mplLi009.tex

Matriisin N sarakkeet ovat koordinaatteja, jotka rajaavat ison $N$-kirjaimen.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 6 & 6 & 5.5 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6.42 & 0 & 8 & 8 & 1.58 & 8 \end{bmatrix}$$

Piirrä ensin tuo N.

Sovella N:ään lineaarikuvausta, jonka matriisi on $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tämä on tyyppiä "leikkaus", "shear". Piirrä tulos.

Skaalaa sen jälkeen x-koordinaatit kertomalla luvulla 0.75 ja piirrä taas.

Vapaaehtoinen lisäys. Pyörittele N:ää "keskipisteen"ympäri siirtämällä keskipiste ensin O:oon ja kertomalla sopivalla kiertomatriisilla ja siirtämällä lopuksi takaisin.

**Vihje:** Ohje piirtoon: Nykyisin voidaan piirtää datapisteitä (yhdysjanoineen) Matlab-tyylisesti(kin) näin: `> plot(v1,v2);`
Matriisin M rivi k : `M[k,1..-1]`
(Vrt. Matlab: M(k,:))
Vanhempi tapa: Piirrettävä data pisteiden listana:

```
> convert(Transpose(N),listlist); plot(%);
```

**383.** mplLi010.tex

(Kynä-paperitehtävä)

Tarkastellaan lämmönjohtumista ohuessa metallilevyssä. Oletetaan, että johtumista tapahtuu vain levyn suunnassa, ja levyn reunoilla on annetut (ajan suhteen) vakiolämpötilat. Levyn lämpötilat eri pisteissä asettuvat ajan kuluessa arvoihin, jotka ovat ajan suhteen vakioita, tällöin puhutaan lämpötilajakauman tasapainotilasta ("steady state"). Tehtävänä on määrittää lämpötilajakauma levyssä tasapainotilan vallitessa.

Tarkastellaan kuvan mukaista tilannetta: (Klikkaa oikealla olevaa pdf-linkkiä, niin kuva näkyy kunnolla.)

```
  --- 20----20---20----
 |    |     |     |    |
10----*-----*-----*---40
 |    |     |     |    |
10----*-----*-----*----40
 |    |     |     |    |
  ----20----20----20---
```

Kuvassa näkyvät annetut vakioreunalämpötilat (reunaehdot). Tehtävänä on laskea ratkaisuapproksimaatiot *:llä merkityissä sisäsolmupisteissä käyttäen seuraavaa periaatetta: Lämpötila levyn solmupisteessä on naapurisolmujen lämpötilojen keskiarvo.

Jos indeksoidaan solmupisteiden lämpötilat vaakarivijärjestyksessä: $T_1, \ldots T_6$, voidaan ryhtyä kirjoittamaan yhtälöitä tyyliin:

$T_1 = \frac{20+10+T_4+T_2}{4}, \ldots.$

Kirjoita koko $6 \times 6$- yhtälösysteemi "standardimuodossa".
**Huom:** Tasapainotilaratkaisu saadaan ns. *Laplacen yhtälön* $\nabla^2 T = 0$ ratkaisuna. Tässä esitettyyn likimääräismenettelyyn ns. *differenssimenetelmään*

Ratkaisua pyydetään seuraavassa tehtävässä.

**384.** mplLi011.tex

Ratkaise edellisen tehtävän yhtälösysteemi Maplea (tai Matlabia) käyttäen. (Tässä Maple-ohjeet.) Muodosta sitten edellisen tehtävän kuvan mukainen $4 \times 5$ matriisi, jossa on annetut reunalämpötilat sekä lasketut sisälämpötilat oikeilla kohdillaan. Ota nurkkapisteiden lämpötiloiksi kahden naapurisolmun lämpötilojen keskiarvo. Piirrä kuva, pyörittele hiirellä.

**Vihje:** Tehtävässä riittää käytellä LinearAlgebra-kirjaston funktiota `LinearSolve`.

Ratkaisuvektorin muokkaaminen matriisiksi onnistuu mukavasti, kun leikkaat/liimaat alla olevan funktiomäärityksen Maple-työarkillasi. (Suorita leikkaus pdf-tehtävätiedostosta.)

```
Reshape:=(vek,m,n)->Matrix(linalg[matrix](m,n,convert(vek,list)));
```

Funktio on tehty vastaamaan Matlabin funktion reshape käytöstä siinä tapauksessa, jossa vektori muutetaan annetun kokoiseksi matriisiksi.

Lämpötilamatriisin rakentelu kannattaa hoidella (Matlabinomaiseen) tyyliin:

```
Tsisa:=Reshape(T,2,3); # vektorissa T on ratkaisulampotilat.
Tiso:=Matrix(4,5,0);
vaaka:=<15|20|20|20|30>;
pysty:=...;
Tiso[2..3,2..4]:=Tsisa;
...
```

Piirtäminen komennolla `matrixplot` (muista with(plots):)

```
matrixplot(Tiso,axes=boxed);
```

Pyörittele kuvaa hiirellä.

**Huom:** Sanomattakin on selvää, että tehtävä sopii erikoisen hyvin Matlab:lle. Tässä pikemminkin näytetään, että Maplen LinearAlgebra-työkaluilla voidaan matkia Matlab-työtapaa ja päästä lähelle samaa käsittelymukavuutta.

Lisätehtävä: Tee ratkaisu Matlabilla!

Palataan asiaan perusteellisemmin Matlab-tehtävien yhteydessä, jolloin käsitellään lähemmin differenssimenetelmää.

**385.** mplLi012.tex
Olkoon $\mathcal{B} = \{1, \cos t, \ldots, \cos^6 t\}$ ja $\mathcal{C} = \{1, \cos t, \ldots, \cos 6t\}$.

Suorita Maple-komennot:

```
> cos(2*t): %=expand(%);
...
> cos(6*t): %=expand(%);
```

Olkoon $H = \mathrm{sp}(\mathcal{B})$. Osoita, että $\mathcal{B}$ on $H$:n kanta. (Tämä on miltei pelkkä toteamus, sehän palautuu monomien `LRT`- ominaisuuteen.) Varsinainen tehtävä:

Kirjoita $\mathcal{C}$:n vektorien $\mathcal{B}$-koordinaattivektorit (käyttäen hyväksi edellä viitatun Maple-istunnon tuloksia) ja osoita niiden avulla, että $\mathcal{C}$ on `LRT` ja siis $H$:n kanta.

**Vihje:** Merkinnät kirjan Lay Linear Algebra mukaiset.

**386.** mplLi013.tex
Lay: Linear Algebra s. 277 teht. 17

Olkoon $\mathcal{B} = \{1, \cos t, \ldots, \cos^6 t\} = \{\mathbf{x_0}, \ldots, \mathbf{x_6}\}$ ja $\mathcal{C} = \{1, \cos t, \ldots, \cos 6t\} = \{\mathbf{y_0}, \ldots, \mathbf{y_6}\}$, kuten edellä (teht. mplLi012).

Edellä osoitettiin, että myös $\mathcal{C}$ on avaruuden $H = \mathrm{sp}\{\mathbf{x_0}, \ldots, \mathbf{x_6}\}$ kanta.

(a) Muodosta $P = \left[ [\mathbf{y_0}]_{\mathcal{B}} \quad | \quad \ldots \quad | \quad [\mathbf{y_6}]_{\mathcal{B}} \right]$, ja laske $P^{-1}$.

(b) Selitä, miksi $P^{-1}$:n sarakkeet ovat vektorien $\mathbf{x_0}, \ldots, \mathbf{x_6}$ $\mathcal{C}$-koordinaattivektoreita. Kirjoita sitten trigonometrisiä kaavoja, joilla $\cos t$:n potensseja voidaan lausua moninkertaisten kulmien kosinien avulla. Esimerkkinä sopivasta kaavasta olkoon: $5\cos^3 t - 6\cos^4 t + 5\cos^5 t - 12\cos^6 t$.

Tällainen esitysmuoto on mm. integroinnin kannalta erityisen hyödyllinen, kuten varmasti tiedät.

**Vihje:** Merkinnät kirjan Lay Linear Algebra mukaiset.

**387.** Ratkaise yhtälöryhmä

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

kun

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -13 & -13 & -2 & 7 \\ 18 & -4 & 30 & -1 & -12 \\ -23 & 3 & 7 & 15 & 7 \\ 9 & 36 & -1 & 14 & 16 \\ 3 & 28 & 7 & 14 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -196 \\ 435 \\ 11 \\ 111 \\ 195 \end{bmatrix}$$

**Vihje:** Matriisin voi syöttää joko vaakavektoreja päällekkäin latomalla:
`A := <<a | b | c>, <d | e | f>>`
tai pystyvektoeita vierekkäin:

```
A:=<<a,d> | , <b | e>,<f | c>>
```

## mplPerusteet

**388.** Tiedosto: mplP001.tex
Ohjelmat: Maple, [Mathematica]

Sievennä lauseke

$$\frac{x-1}{(1-\frac{1}{\sqrt{x}})(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}.$$

**Vihje:** Kokeile funktiota `simplify`.

**389.** mplP002a.tex (PA P1 s.2011)

Fibonaccin lukujono $(f_n)$ määritellään alkuehdoilla $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ja palautuskaavalla $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$, kun $n \geq 2$. Samat luvut saadaan suoraan lausekkeesta

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-\varphi)^{-n})$$

arvolla $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Määrittele $f_n = f(n)$ funktiona ja osoita, että sekä alkuehdot että palautuskaava toteutuvat.
Vihje: Määrittele aluksi `phi:= ...` Palautuskaavan kohdalla on helpompi osoittaa jokin lauseke nollaksi kuin verrata kahta hankalaa lauseketta.
(`sqrt, simplify, expand`)

**Vihje:** Muista funktiomääritys:
`f:=n->...`

**390.** mplP002b.tex (PA P1 s.2011)

Intialaisen matemaatikon Srinivasa Ramanujanin (1887–1920) keksimän kaavan mukaan

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1103 + 26390n)(4n)!}{396^{4n}(n!)^4}.$$

Tutki (numeerisesti), monennenko osasumman avulla saadaan luvun $1/\pi$ likiarvo 50 desimaalin tarkkuudella.

b) Määrittele sarjan yleinen termi $a_n = a(n)$ funktiona ja laske raja-arvo

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Sarja suppenee siis suunnilleen samaa vauhtia kuin sellainen geometrinen sarja, jonka suhdeluku on $q$.

(`Pi, sqrt, sum, evalf(luku, desimaalien lkm), limit`)

**Vihje:** Muista funktiomääritys:

`a:=n-> ...`

**391.** mplP002.tex (PA P1 s.2011)

1. Klikkaa hiirellä (Viikkoharjoitukset-sivun) tiedostoa (maple1.mw) tässä mplP002Pohja.mw ja avaa se ohjelmalla Maple 15. Käy läpi työarkin tehtävät ja siirry sen jälkeen alla oleviin tehtäviin.

2. a) Kokeile Maplen voimia seuraavien sarjojen kohdalla:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}.$$

   b) Montako termiä hajaantuvasta sarjasta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

   on otettava mukaan, jotta vastaava osasumma olisi vähintään 100?
   (`sum, evalf, infinity`)

**Vihje:**

**392.** Suorita Maplella :

```
> series(exp(x), x = 0, 10);  # tai taylor(...);
> p:=convert(%,polynom);
> c:=coeffs(p,x);
> evalf(%);
```

Selitä, mitä näissä tapahtuu. (Tutki tarvitessasi helpillä tyyliin `?convert`.)

Piirrä polynomin p kuvaaja sopivalla välillä.

**393.** Etsi lukujen $1234^{3243}$ ja 7681 suurin yhteinen tekijä.

**Vihje:** Suurin yhteinen tekijä lasketaan funktiolla `igcd`. Jos myös kertoimet halutaan tietää, kannattaa käyttää funktioita `igcdex`.

**Luokittelu, avainsanat**: Mapleperusteet, mplPerusteet, syt, gcd, lukuteoriaa

**394.** mplP006.tex (HA:n Maple-kirja ss. 48-50)

1. Laske $2^{123}, \pi^3, e^5$ neljälläkymmenellä (40) numerolla.
2. Mikä rationaaliluvuista $\frac{22}{7}, \frac{311}{99}, \frac{355}{113}$ approksimoi parhaiten $\pi$:tä ?
3. Kumpi luvuista $\pi^e$ , $e^\pi$ on suurempi?
4. Jaa tekijöihin polynomi $x^3 - y^3$

**Vihje:**

```
?evalf
?factor
```

**395.** mplP007.tex (HA:n Maple-kirja ss. 48-50)

Määrittele polynomilauseke $p = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$.
Määritä $p$:n juuret ja piirrä kuvaaja välillä, joka sisältää juuret. Määritä myös paikalliset ääriarvot.

**Vihje:**

```
p:= ...   (ei siis p = ... (kuten Matlabissa))
plot(p,x=a..b)
?plot
solve   yrittaa tarkkaa analyyttista ratkaisua (vaikka onnistuisi, voi olla turhan mutkikas)
fsolve  numeerinen ratkaisija
```

**Luokittelu**: Maple perusteet, lausekkeet, yhtälöt, nollakohdat, grafiikka

**396.** mplP008.tex (HA:n Maple-kirja ss. 48-50)

Piirrä samaan kuvaan $x^4$ ja $2^x$ ja selvitä, kuinka monessa pisteessä ne leikkaavat. Varmaan joudut piirtämään useita kuvia eri alueilta.

Suurimman juuren etsimisessä voi oikean alueen ehkä löytää nopeimmin tyyppiä `seq([x^4,2^x],x=a..b);` olevalla komennolla.

Tutki `fsolve`-komennon help-teksti ja määritä likiarvo suurimmalle juurelle.

**Vihje:** `seq(f(x),x=a..b)` toimii kokonaislukuaskelin.
Toki askel voidaan säätää halutuksi tähän tyyliin:

```
jono:=seq(a+i*h,i=0..10);
```

**Luokittelu**: Maple perusteet, jonot (seq), yhtälöt, nollakohdat, grafiikka

**397.** mplP009.tex (HA:n Maple-kirja ss. 48-50)
Mitä tekevät seuraavat Maple-komennot:

```
> sum(i^2,i=1..10);
> ifactor(1998); # Maple-oppaan kirjoitusvuosi
> ifactor(2012); # Aikaa on kulunut.
> solve({x+2*y=5,x^2+y^2=10},{x,y});
> solve([x+2*y = 5, x^2+y^2 = 10], [x, y])
```

**Vihje:** Kaksi solve-komennon muotoa liityvät tietorakenteisiin. Edellinen käsittelee joukkoina, jälkimmäinen listoina. (Joukon alkioilla ei ole määrättyä järjestystä päinvastoin kuin listassa.)

**Luokittelu, avainsanat**: Mapleperusteet, yhtälöryhmä, joukko, lista, tekijöihin jako.

**398.** mplP010.tex
Muodosta funktion $\cos(x)\sin(x)$ ensimmäinen ja toinen derivaatta ja piirrä kunkin kuvaaja sopivaksi katsomallasi välillä kenties mieluiten eri koordinaatistoihin.

**Vihje:**

**399.** mplP011.tex (HA:n Maple-kirja ss. 48-50)

Funktiolausekkeen derivaatta muodostetaan `diff`-komennolla.

Määritä seuraavien funktioiden 1. ja 2. derivaatta ja sievennä tulokset `simplify`-komennolla.

$6x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ , $\frac{x+1}{x^2+1}$ , $\cos(x^2 + 1)$ , $\arcsin(2x + 3)$ , $\sqrt{1 + x^4}$ , $\arctan x$

**Luokittelu, avainsanat**: Mapleperusteet, Maplediffint, lauseke, symbolinen derivointi, diff

**400.** mlP014.tex, mplP014.tex
Maple [Mathematica] , Matlab (erityisesti b)-kohta).

Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = 1 + \frac{sin(x)}{1 + x^2}.$$

a) Maple: Määrittele f lausekkeeksi, laske f:n arvo pisteessä $x = -2.0$ ja piirrä kuvaaja välillä $[-5, 5]$.

Matlab:
Tee vastaava asia Matlabilla, kirjoita skripti. Huomaa, että Matlabissa täytyy ensin antaa x:lle numeerinen (vektori)arvo.

b) Tee samat asiat, mutta nyt määrittelemällä f funktioksi.

**Vihje:**

a)

```
   Maple                                  Matlab:

> f:=1-...                               >> x=...
> subs...                                >> f=...
> plot                                   >> plot
```

b)

```
    Maple                                Matlab

> f:=x->1-...                           >> f:=@(x) 1-...
```

**Ratkaisu:** Ratkaisu:

```
mplPerusteet/mplP014R.mw  ja .pdf
mlPerusteet/mlP014R.m ja .pdf
```

**Luokittelu**:
`mplteht/mplPerusteet/mplP014.tex`, `matlabteht/mlPerusteet/mlP014.tex`
**Avainsanat:**
Mapleperusteet, funktiot, lausekkeet, Matlabperusteet

**401.** Laske funktion $f(x) = e^{-x^2}$ arvoja 0.5:n välein välillä $0 \ldots 5$, ja piirrä taulukoiduista arvoista kuvaaja

**Vihje:** Määrittele f funktioksi tyyliin `f:=x-> ...`
Muodosta jono seq-funktion avulla ja ympäröi se listasuluilla tyyliin: `h:=0.5: x:=[seq(k*h),k=...]`
Muodosta funktion arvot tyyliin `y:=map(f,x)`
Taulukon saat esim. array-funktiolla.
Datan voi piirtää nykyisin myös "Matlab-tyylillä": `plot(x,y)`

**Ratkaisu:**

```
x := [seq(.5*k, k = 0 .. 10)]
f := x->exp(-x^2)
y := map(f, x)
array([x, y])
plot(x,y)
```

**402.** Laske funktion $f(x) = e^{-x^2}$ arvoja 0.5:n välein välillä $0 \ldots 5$, ja piirrä taulukoiduista arvoista kuvaaja

**Vihje:**

**403.** mplP017.tex [mplD019.tex]
Opiskelija ottaa lainaa 10000 euroa hetkellä $k = 0$ ja ryhtyy maksamaan sitä takaisin kuukauden päästä hetkellä $k = 1$. Kuukausikorko on 1% (huh!) ja takaisinmaksu tapahtuu kiintein maksuerin 450 EUR/kk

Olkoon $y_k$ $k$:n kuukauden kuluttua jäljellä olevan velan määrä. Kirjoita differenssiyhtälö $y_k$:lle.

Muodosta taulukko ja graafinen esitys, jossa on pisteet $(k, y_k)$, ja selvitä sen perusteella, miten kauan velan maksu kestää ja miten paljon rahaa opiskelijaparka käyttää koko projektiin.

Luokittelu: Maple-perusteet, Differenssi- ja differentiaaliyhtalot

**Vihje:**

## mplSarjat

**404.** Laske sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)^k$$

summa. Millä arvoilla $x \in \mathbb{R}$ sarja suppenee? Piirrä summafunktion kuvaaja.

**Vihje:** Summa lasketaan komennolla `sum`

**405.** (Maple ja Matlab)

Määritä seuraavat summat:

$$\sum_{k=1}^{1000} k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

**Vihje:** Maple: Kokeile edelliseen sekä `sum` että `add` - komentoja, jälkimmäiseen vain `sum`.

Matlab: Muodosta vektori `1,2,...1000` ja sitten vain `sum`. Jälkimmäisessä voit laskea muutamalla, toinen toistaan suuremmalla arvolla. (Numeerisesti et tietenkään voi summata äärettömyyksiin.)

**406.** (Maple)

Määritä symboliset summat:

$$\sum_{k=1}^{n} k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

**Vihje:** Maple-funktio `sum`
(Symbolinen summaus on integraalifunktion määrittämistä vastaava diskreetti tehtävä, usein jopa vaikeampi.)

## mplTodennäköisyyslaskenta

**407.** Luo funktiolla RND 30 satunnaislukua väliltä $[0,1]$. Kuinka moni luvuista osuu välille $[0,0.1)$? Kuinka monen pitäisi osua?

**Vihje:**

## mplVektorianalyysi

**408.** Piirrä seuraavien funktioiden tasa-arvokäyrät:

a) $x^3 - xy^3$

b) $\sin(x) cosh(y)$

c) $\cos^2(x)\cosh(y)$

**Vihje:** Tasa-arvokäyriä voi piirtää kommennolla `contourplot`.

**409.** Piirrä avaruuskäyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\cos t}{t}\,\mathbf{i} + \frac{\sin t}{t}\,\mathbf{j} + \arctan t\,\mathbf{k},$$

kun $t \in [1, T]$ ja $T = 100$. Määritä käyrän kaarenpituus ja tutki, onko sillä raja-arvoa, kun $T \to \infty$.

**Vihje:** Käyrä on luontevinta kirjoittaa vektoriksi `r = {Cos[t]/t,Sin[t]/t,ArcTan[t]}` ja laskea kaarenpituus integraalista $\int |\mathbf{r}'(t)|\,dt$.

**410.** Määritä funktion $f(x, y) = x^2 - y$ suurin arvo ympyrällä $x^2 + y^2 = 1$. Käytä Lagrangen menetelmää.

**Vihje:** `(diff, solve, f:= (x,y)->(x2+y)`. Jos et ehdottomasti osaa Lagrangen menetelmää, lataa `with(Student[MultivariateCalculus])` ja tutki *LagrangeMultipliers*-dokumentaatiota.

**411.** TV-yhtiö on (pahaa aavistamatta) palkannut matemaatikon seikkailukilpailun juontajaksi. Kilpailussa tehtävänä on kiertää mahdollisimman lyhyt reitti sen kolmion sisällä, jonka kärjet ovat pisteissä $(0, 0), (2, 0)$ ja $(0, 2)$. Lähtö tapahtuu pisteestä $(1, 0)$, ja kilpailijan tarvitsee koskettaa jokaista muuta kolmion sivua ja palata sitten alkupisteeseen Määritä lyhin tällainen reitti, ja sen pituus.

**Vihje:** Muodosta matkan funktio $f(x, y)$ – mieti ensin, mitä kuvaa $x$ ja mitä $y$, ja sen jälkeen, kuinka etäisyys laskettaisiin (vihje: Euklidinen etäisyys). Tämän jälkeen etsi funktion $f$ kriittiset pisteet, eli osittaisderivaattojen nollakohdat, ja tutki niiden laatua. Valitse näistä pisteistä minimin tuottava, ja laske pituus.

## mplYhtälöt

**412.** Ratkaise yhtälö $2x^6 + 4x^3 - 14x^2 + 1 = 0$.

**Vihje:** Maplen funktio `solve`.

**413.** Määritä polynomin

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$$

nollakohdat ja paikalliset minimit ja maksimit. Piirrä kuva.

Suorita sekä Maplella että Matlabilla.

**Vihje:** Maplella voit yrittää 3. asteen yhtälön ratkaisua myös symbolisesti `solve`-komennolla. Numeerisesti `fsolve`.

Matlabilla vain numeerisesti: `roots`.
Polynomin derivaatta: `polyder`

**414.** Maple , Matlab (H2T9)

Tarkastellaan väestönkasvumallia

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{v}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1),$$

jossa otetaan huomioon biologisen lisääntymisen ohella myös maahanmuutto, jonka oletetaan tapahtuvan vakionopeudella $v$ yksilöä vuodessa (netto). Oletetaan, että tietty populaatio on alunperin $10^6$ yksilöä, 435000 yksilöä muuttaa "maahan"1. vuoden aikana ja populaatiossa on 1564000 yksilöä vuoden lopulla. Määritä luku $\lambda$ Käytä tätä $\lambda$:n arvoa ennustamaan populaation koko toisen vuoden lopussa, kun oletetaan maahanmuuttovauhdin säilyvän vakiona.

**Vihje:** Maple: `fsolve`, Matlab: `fzero`

**Avainsanat:** Epälineaarinen yhtälö, väestönkasvumalli, epalineaarinen yhtalo, vaestonkasvumalli.

**415.** Maple tai Matlab Etsi yhtälön $x^8 - 36x^7 + 546x^6 - 4536x^5 + 22449x^4 - 67284x^3 + 118124x^2 - 109584x + 40320 = 0$ välillä $[5.5, 6.5]$ oleva juuri. Muuta $x^7$:n kerroin luvuksi $-36.001$ ja katso, mikä vaikutus sillä on juureen.

**Vihje:** Maple: `fsolve`
Matlab: `roots`

**416.** Maple
Määritä ellipsin $9x^2+16y^2 = 144$ sisään piirretyn (akselien suuntaisen) suorakulmion maksimaalinen pinta-ala. Piirrä ellipsi ja suorakulmio.

**417.** Matlab/Maple/Mathematica
H2T17/mlNl100/mplY100/mmaY100

Etsi yhtälön $x^8-36x^7+546x^6-4536x^5+22449x^4-67284x^3+118124x^2-109584x+40320 = 0$ välillä $[5.5, 6.5]$ oleva juuri. Muuta $x^7$:n kerroin luvuksi $-36.001$ ja katso, mikä vaikutus sillä on juureen.

**Vihje:** Maple: `fsolve`
Matlab: `roots` Mathematica: ...

**Ratkaisu:** Ratkaisutiedostossa lisää variaatioita ja analyysiä tehtävään.
**Avainsanat:** Polynomin juuret, numeriikka, häiriöalttius, ill-conditioned

**418.** Matlab/Maple/Mathematica
H2T17/mlNl100/mplY100/mmaY100

Etsi yhtälön $x^8 - 36x^7 + 546x^6 - 4536x^5 + 22449x^4 - 67284x^3 + 118124x^2 - 109584x + 40320 = 0$ välillä $[5.5, 6.5]$ oleva juuri. Muuta $x^7$:n kerroin luvuksi $-36.001$ ja katso, mikä vaikutus sillä on juureen.

**Vihje:** Maple: `fsolve`
Matlab: `roots` Mathematica: ...

**Ratkaisu:** Ratkaisutiedostossa lisää variaatioita ja analyysiä tehtävään.
**Avainsanat:** Polynomin juuret, numeriikka, häiriöalttius, ill-conditioned

**419.** Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrät $y^2 = x$ ja $x - y = 3$.

**Vihje:** Mieti, kumpi on helpompaa: integrointi x- vai y-suunnassa.