<u>Picard-Lindelöfin menetelmä</u>

HA, Nov. 2013

Picardin iteraatio

Alkuarvotehtävä:

$$(DY) \qquad y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$$

Integroimalla:

$$\text{(IY)} \quad y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

Kyseessä on "kiintopisteen" hakeminen, tällä kertaa "funktioavaruudessa", ts. haetaan funktiota $y(x)$, joka toteuttaa
yo. integraaliyhtälön:

Iteraation "alkupisteenä" (alkufunktiona) käytetään vakiofunktiota $z_0(x) = y_0$
Funktiojono (z_n) saadaan siten iteroimalla:

$$z_n(x) = z_{n-1}(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, z_{n-1}(t))\, dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, z_{n-1}(t))\, dt$$

Tässä, kuten aina "kiintopistehommissa", nähdään, että jos on olemassa rajafunktio $y(x) = \lim_{n \to \infty} z_n(x)$, niin tämä rajafunktio
toteuttaa integraaliyhtälön (IY), ja siten alkuperäisen (DY):n, mikäli rajankäynnin ja integroinnin järjestyksen saa vaihtaa.
Tietyillä yleisillä edellytyksillä näin on.

Esimerkki:

$$y' = x + y^2,\ y(0) = 1$$

Funktiomäärittely on lähimpänä matemaattista kirjoitustapaa.
Tässä on valittava kahdesta tavasta se (vähemmän havainnollinen), joka evaluoi määrittelyaikana, ts.

```
F:=unapply(lauseke(x),x)
```

(Muussa tapauksessa tulee liian raskas rekursio.)

> $F := unapply(lauseke(x), x)$

> $restart$

```
> f:=(x,y)->x+y^2;  # Tämä voidaan tehdä (x,y)->arvo(x,y) tyyliin.
```

(1.1)

$$f := (x, y) \rightarrow x + y^2 \tag{1.1}$$

> $z[0] := x \rightarrow 1;\ y0 := 1;$

$$z_0 := x \rightarrow 1$$

$$y0 := 1 \tag{1.2}$$

> $Z[1] := x \rightarrow y0 + simplify(int(f(t, z[0](t)), t = 0 ..x))$
> *# Tämä olis havainnollista, mutta liian raskasta.*

$$Z_1 := x \rightarrow y0 + simplify\left(\int_0^x f\left(t, z_0(t)\right)\, \mathrm{d}t\right) \tag{1.3}$$

> $Z[1](x)$ *# Laskut tehdään vasta suoritusaikana.*

$$1 + \frac{1}{2}\, x^2 + x \tag{1.4}$$

> $z[1] := unapply(y0 + simplify(int(f(t, z[0](t)), t = 0 ..x)), x);$
> *# Sama asia, mutta nyt integraali (ja sievennys) suoritetaan jo funktion määrittelyvaiheessa*

$$z_1 := x \rightarrow 1 + \frac{1}{2}\, x^2 + x \tag{1.5}$$

>

> $z[2] := unapply(y0 + simplify(int(f(t, z[1](t)), t = 0 ..x)), x);$

$$z_2 := x \rightarrow 1 + x + \frac{1}{20}\, x^5 + \frac{1}{4}\, x^4 + \frac{2}{3}\, x^3 + \frac{3}{2}\, x^2 \tag{1.6}$$

>

For-luuppi:

```
> for i to 4 do
  z[i] := unapply(y0 + simplify(int(f(t, z[i - 1](t)), t = 0 ..x)), x);
  end do:
```

>

> $z[0](x)$

$$1 \tag{1.7}$$

>

> $z[1](x)$

$$1 + \frac{1}{2}\, x^2 + x \tag{1.8}$$

>

> $z[2](x)$

$$1+x+\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2 \tag{1.9}$$

>

> $z[3](x)$

$$1+x+\frac{1}{4400}x^{11}+\frac{1}{400}x^{10}+\frac{31}{2160}x^9+\frac{29}{480}x^8+\frac{233}{1260}x^7+\frac{13}{30}x^6+\frac{49}{60}x^5+\frac{13}{12}x^4+\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2 \tag{1.10}$$

>

>

> $z[4](x)$

$$1+x+\frac{1}{445280000}x^{23}+\frac{1}{19360000}x^{22}+\frac{607}{997920000}x^{21}+\frac{943}{190080000}x^{20}+\frac{265897}{8532216000}x^{19}+\frac{569963}{3592512000}x^{18}+\frac{5506583}{8143027200}x^{17}+\frac{1963837}{798336000}x^{16}+\frac{1350761}{174636000}x^{15}+\frac{2967707}{139708800}x^{14}+\frac{190159}{3706560}x^{13}+\frac{1096099}{9979200}x^{12}+\frac{116621}{554400}x^{11}+\frac{2195}{6048}x^{10}+\frac{6479}{11340}x^9+\frac{1657}{2016}x^8+\frac{271}{252}x^7+\frac{13}{10}x^6+\frac{17}{12}x^5+\frac{17}{12}x^4+\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2 \tag{1.11}$$

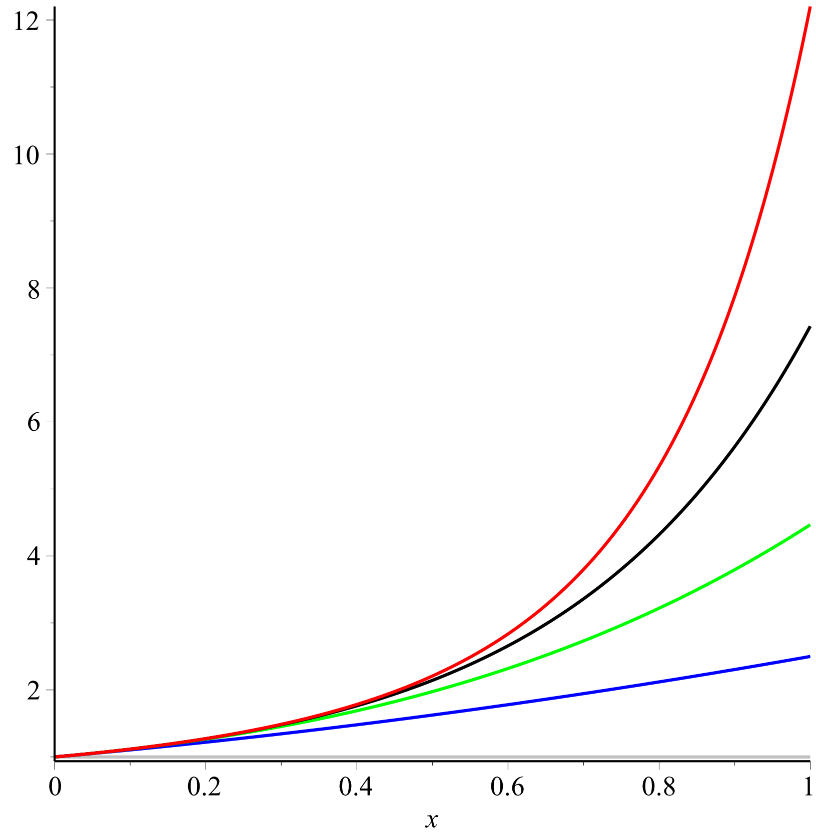
>

Table 1: Picard-iteraatiot

>

Katsotaan kuvia:

> $plot([seq(z[j](x), j=0..4)], x=0..1, color=[grey, blue, green, black, red]);$



>

Ratkaistaan yhtälö Maplen **dsolve**-komennolla:

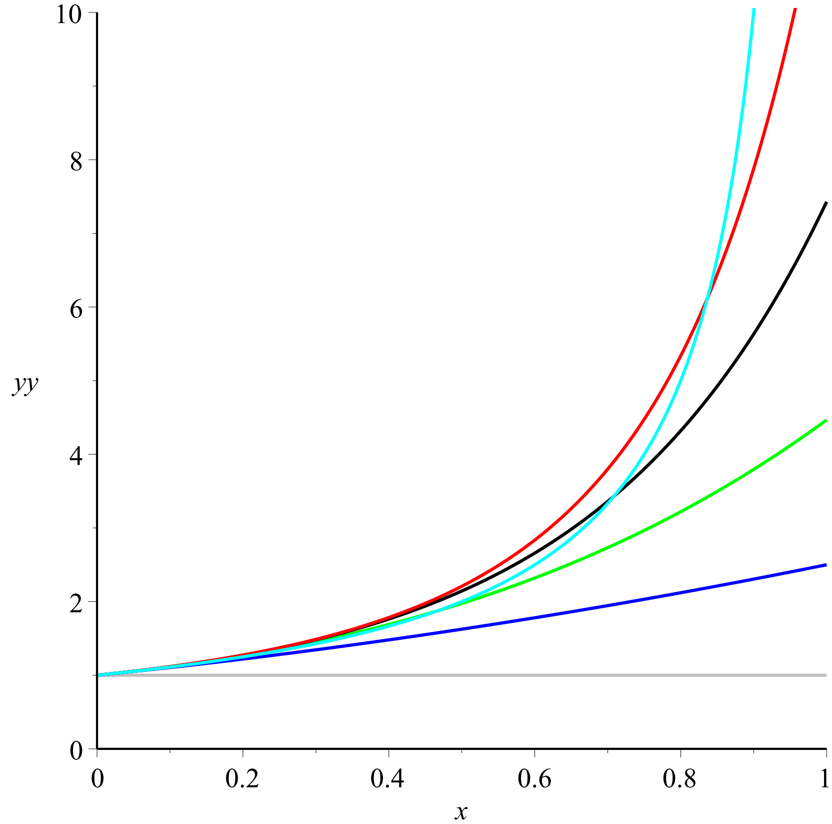
```
> dsolve({diff(y(x),x)=y(x)^2,y(0)=1},y(x));
```

$$y(x) = -\frac{1}{x-1} \tag{1.12}$$

```
> Y:=rhs(%);
```

$$Y := -\frac{1}{x-1} \tag{1.13}$$

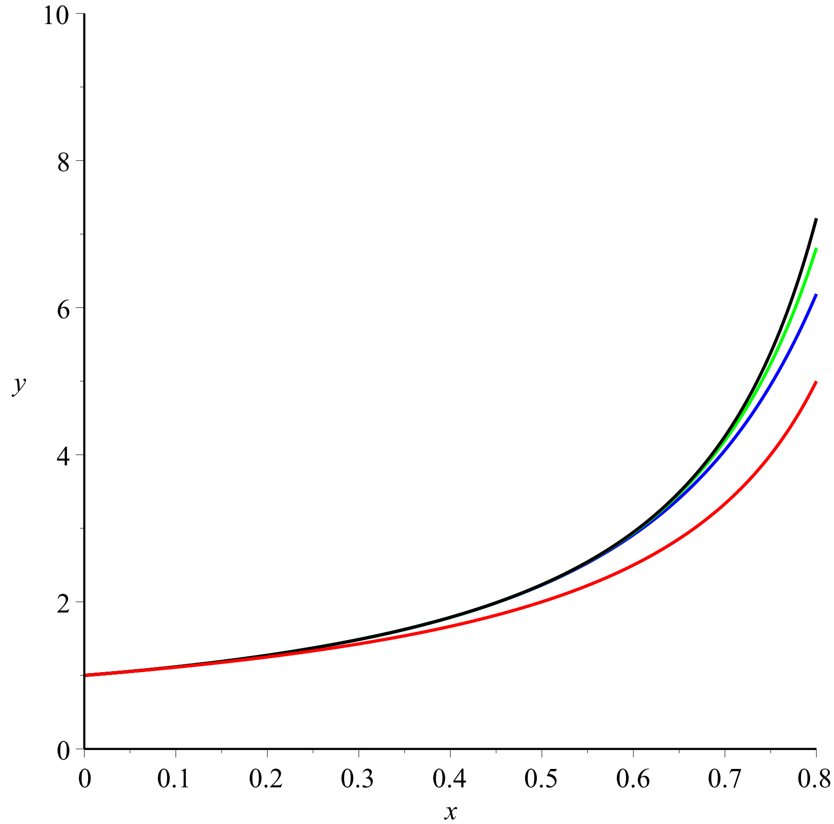
> $plot([seq(z[j](x), j = 0..4), Y], x = 0..1, yy = 0..10, color = [grey, blue, green, black, red, cyan])$



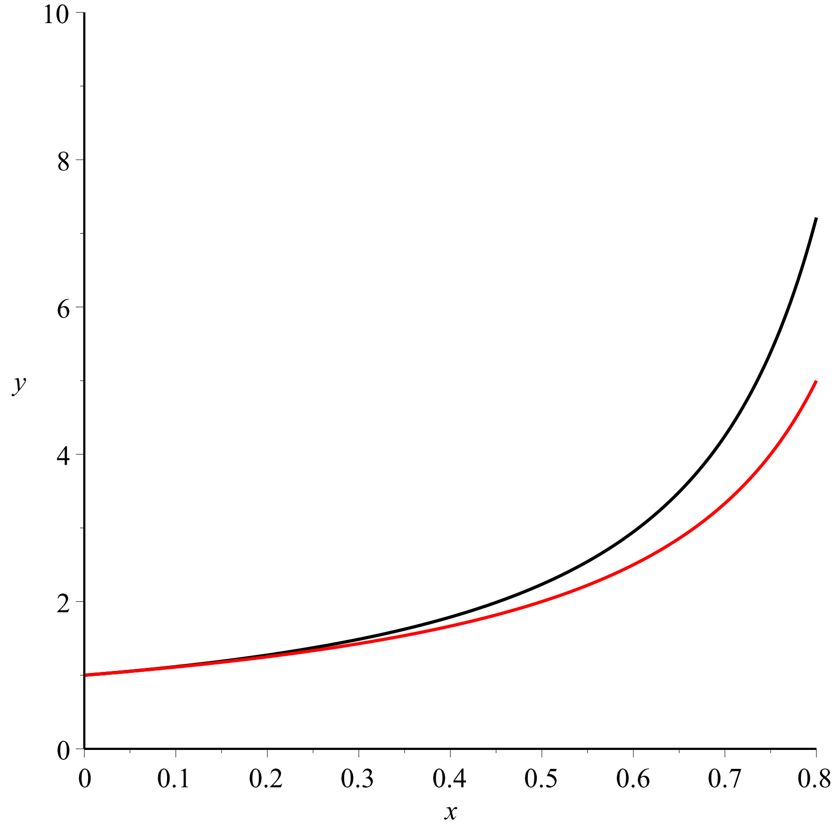
>

Iteroidaan lisää:

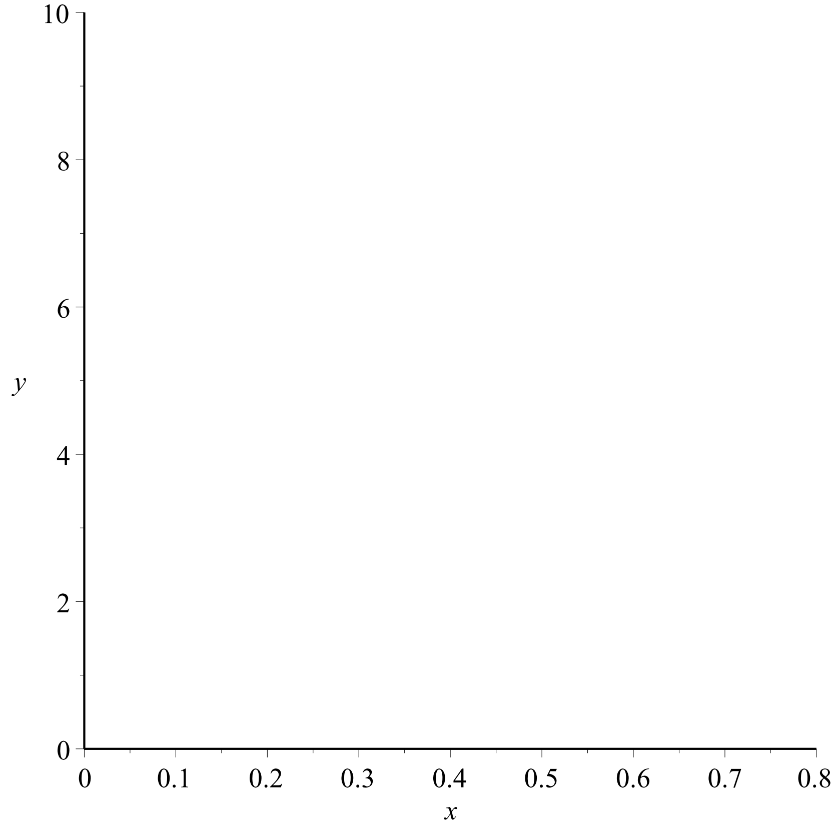
```
> for i from 5 to 8 do
    z[i] := unapply(y0 + simplify(int(f(t, z[i-1](t)), t = 0..x)), x);
  end do:
> plot([seq(z[i](x), i = 5..7), Y], x = 0..0.8, y = 0..10, color = [blue, green, black, red])
```



> $plot([z[7](x), Y], x = 0 ..0.8, y = 0 ..10, color = [black, red])$



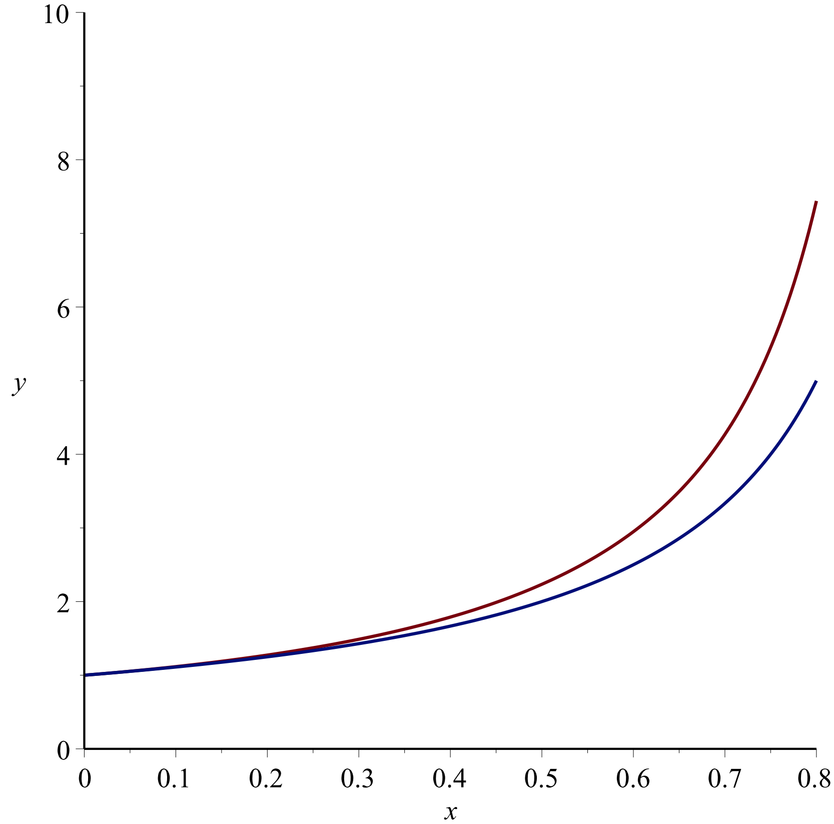
> $plot([z[8](x)], x = 0..0.8, y = 0..10, color = [grey])$ # Mitään ei näy.



> $z[8](x)$
> # Jos uskallat katsoa, niin uskottavaa, että plot kieltäytyy. (Muista: Edit-valikko: Remove output,)

> $zz := convert(z[8](x), float)$:

> $plot([zz, Y], x = 0 ..0.8, y = 0 ..10)$




```
> zz;    # Siedettävämpi
>
```

Tässä on singulariteetti välin oikeassa päätepisteessä, joten sen lähistöllä ei ole hyvää odotettavissa.
Alkuarvopisteen x=0 läheisyydessa näyttää hyvältä. Toki käytös on kuvien perusteella hiukan sen näköinen,
että lisäiterointi jopa huonontaa tilannetta. No, lausekkeiden julma kokokin voi aiheuttaa virhettä.

Toimikoon tämä ainakin Maple-teknisenä esimerkkinä Picard-Lindelöfin iteraation toteutuksesta.