-e

mlVektori

Vektorimuuttujan funktioita ja niiden diffint-laskentaa, toisin sanoin: usean muuttujan funktioiden diffinttiä

1. Harjoitellaan usean muuttujan funktioiden piirtämistä. MATLABissa tämä tehdään määrittelemällä ensin piirtoalueen peittävä diskretointi, tai hila. Tämä määritellään komennolla `meshgrid`. Luodaan esimerkiksi suorakulmion $[1, 2] \times [3, 4]$ peittävä hila:

```
x = 1:0.2:2;
y = 3:0.2:4;
[X Y] = meshgrid(x,y);
```

Nyt muuttujissa `X` ja `Y` ovat hilapisteiden x- ja y-koordinaatit. Niillä voidaan suorittaa laskutoimituksia kuten tavallisillakin muuttujilla; on vain pidettävä mielessä että kyseessä ovat nyt matriisit, eli yleensä haluamme valita alkioittaiset operaatiot matriisioperaatioiden sijaan.

Pintojen piirtäminen tapahtuu komennoilla `surf` ja `mesh`. Lasketaan ja piirretään funktion

$$f(x, y) = x\,y^2$$

kuva:

```
Z = X.*Y;
% Huomaa alkoittainen kertolasku
surf(x,y,Z);
```

.

Piirrä näillä keinoin seuraavien funktioiden kuvat

- $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ alueessa $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- $f(x, y) = x^3 - 3xy$ alueessa $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Toinen yleinen tapa kuvata usean muuttujan funktioita on käyttää tasa-arvokäyriä. Näitä piirretään komennolla `contour`, syntaksi on sama kuin tavallisilla piirtokomennoilla. Kokeile piirtää myös edellisten funktioden tasa-arvokäyrät.

2. Vektorianalyysissä on todistettu että funktion tasarvo-käyrä on aina gradientin normaali. Tutkitaan tätä nyt käytännössä. Piirrä funktiolle

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$$

tasa-arvokäyrät haluamassasi hilassa käyttäen komentoa `contour` (komennon syntaksi on sama kuin tavallisten piirtokomentojen). Tämän jälkeen laske funktion numeerinen gradientti tässä hilassa funktiolla `gradient`. Funktio palauttaa tässä tapauksessa kaksi matriisia, joissa on pisteittäiset numeeriset estimaatit arvoille

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ ja } \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Gradientit kannattaa piirtää vektorikenttänä, MATLABin tapauksessa komennolla `quiver`. Esimerkiksi, jos halutut osittaisderivaatat ovat matriiseissa `dx` ja `dy` niin piirto tapahtuisi komennolla `quiver(x,y,dx,dy)`. Lopuksi piirrä kuvat näkyviin päällekäin komentamalla:

```
contour(x,y,z)
hold on
quiver(x,y,dx,dy)
```

Tutki kuvasta, ovatko gradienttinuolet suorassa kulmassa tasa-arvokäyriä vastaan.

3. Muista, että Jacobin matriisi koostuu vektori- tai skalaariarvoisen funktion F ensimmäisistä osittaisderivaatoista:

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Kuinka laskisit numeerisen Jacobin matriisin?

Vihje: Muista, että numeerisesti

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

4.

Funktio

```
function Jf = numjaco(F,m,x,n)
% f is a function with m components,
% x is a vector with n components,
% the result is an m by n matrix.
Jf = ones(m,n);   h = 1e-4;
f = fcnchk(F);
for j =1:n
    e = zeros(n,1); e(j) = 1;
    Jf(:,j) = (f(x+h*e)-f(x-h*e) )/(2*h);
end;
```

laskee vektorikentän F numeerisen Jacobin matriisin, olettaen että käytetty kanta on standardi. Jos vektorikentässä on vain yksi komponentti, kyseessä on kyseisen funktion gradienttivektori.

Kopioi edellä oleva funktio tiedostoon, ja määrittele funktiot

- $f(x,y) = x^2 y$
- $g(x,y) = xe^{x^2+y}$

ja laske niiden numeeriset gradientit pisteissä $(1,2)$ ja $(2,-4)$. Vertaa tulosta tarkkoihin arvoihin:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 \end{bmatrix} \nabla g = \begin{bmatrix} e^{x^2+y} + 2x^2 e^{x^2+y} \\ xe^{x^2+y} \end{bmatrix}$$

5. Piirrä funktion $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ määrittelemä pinta (x,y)-tason neliön $[-2,2] \times [-2,2]$ alueella. Laske tämän funktion integraali yli kyseisen neliön. Kyseisen integraalin arvo koko tason ylitse on π.

Vihje: Pinnan piirtämiseen tarvitset sopivan alueen peittävän hilapisteistön. Näitä luodaan MATLABissa komennolla `meshgrid`, katso `help meshgrid`. Pinta piirretään komennolla `mesh` tai `surf`, katso dokumentaatiota.

Integraalin laskemiseen kannattaa käyttää funktiota `dblquad`. Katso kutsumisohjeet dokumentaatiosta. `dblquad`in ensimmäisen argumentin tulee olla funktio: tässä kannattaa käyttää MATLABin anonyymifunktioita. Esimerkiksi $\int_0^3 \int_2^3 xy\,dx\,dy =$ `dblquad(@(x,y)x.*y,2,3,0,1)`. Jälleen kerran, tutki dokumentaatiota `function_handle`.

6. Laske funktion $f(x,y) = 3 + \cos(x) + \cos(y)$ määräämän pinnan ja suorakulmion $[0,\pi] \times [0,2\pi]$ väliin jäävä tilavuus. Piirrä havainnolistava kuva.

Vihje: Tilavuuteen tarvitset kaksinkertaista integraalia `dblquad`, pinta piirretään komennoilla `meshgrid` ja `mesh`.

7. Piirrä funktion $f(x,y) = y^2 - x^2$ tasa-arvokäyrät ja gradienttivektorikenttä, ja totea, että gradientti on aina kohtisuorassa tasa-arvokäyrää vasten.

Vihje: Laske gradientti funktiolla `gradient`, ja piirrä tasa-arvokäyrät komennolla `contour`. Gradienttivektorikentän saat piirrettyä komennolla `quiver`.

8. Määritä pinnan $z = -x^2 - y^2$ normaalivektori, ja piirrä sen vektorikenttä samaan kuvaan pinnan kanssa.

Vihje: Aloita määrittelemällä jokin tason suorakulmio funtion `meshgrid` avulla - tämän jälkeen voit määritellä pinnan, eli matriisin z. Pinnan normaalivektorin saat laskettua funktiolla `surfnorm`. Piirrä ensiksi pinta komennolla `surf(x,y,z)`, sen jälkee kirjoita `hold on`, jonka jälkeen kirjota `quiver3(x,y,z,u,v,w)`, missä u, v ja w ovat `surfnorm`in palauttamat matriisit.