

-e

m1Nonlinequ, Epälineaariset yhtälöt

1.

Historiallisesti mielenkiintoinen yhtälö on

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

jota Wallis-niminen matemaatikko käsitteli, kun hän ensi kertaa esitteli Newtonin menetelmää Ranskan akatemialle. [Lähde: Moler NCM]

1. Piirrä kuvaaja saadaksesi alkuarvon Newtonin menetelmälle reaalijuurta varten.
2. Määritä reaalijuuri omanewton:lla Neuvo: Polynomifunktion voit määrittellä tähän tapaan, kun p on kerroinvektori:

$$\text{pf}=@(x) \text{polyval}(p,x)$$

Derivaatan saat polyder- (tai omapolyder)-funktioilla.

3. Yritä löytää kompleksijuuri antamalla kompleksisia alkuarvoja. (Jos löydät yhden, niin toinen on sen liittoluku.)
4. Määritä juuret roots-funktion avulla.

Vihje:

Ratkaisu: m1N101ratk.m [Tulee]

2. Määritä funktion

$$f(x) = 12(x - 1) \sin \frac{x}{x^2 + 0.4x + 0.1} \quad x \in [-4, 4]$$

kaikki nollakohdat (33 kpl).

3.

[NCM 4.15, p. 138]

Keplerin malli:

$$M = E - e \sin, E$$

1. Ratkaise fzero:lla
2. Sarjakehitelmä:

$$E = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_m(me) \sin(mM)$$

Vihje:

Ratkaisu: M1N102ratk.m[Tulee]

4.

[NCM 4.15, p. 138]

Vesiputken syvyys, jotta ei jäädy.

Vihje:

Ratkaisu: M1N1xxratk.m[Tulee]

5. Välinpuolitusmenetelmä on eräs tapa löytää funktion nollakohta. Bolzanon lauseen nojalla, jos jatkuvalla funktiolla on jonkin suljetun välin $[a, b]$ päätepisteissä erimerkkiset arvot, sillä on vähintään yksi nollakohta tällä välillä. Välinpuolitusmenetelmä toimii seuraavasti:

- Laske välin $[a, b]$ keskikohta $m = \frac{b+a}{2}$.
- Laske $f(m)$. Jos $f(m) = 0$, ollaan löydetty nollakohta ja lopetetaan algoritmi.
- Jos $f(m)$:n merkki on sama kuin $f(a)$:n, voidaan tutkittavan välin vasenta päätepistettä siirtää kohtaan m , eli $a \leftarrow m$, ja palataan algoritmin kohtaan 1.
- Jos $f(m)$:n merkki on sama kuin $f(b)$:n, voidaan tutkittavan välin oikeaa päätepistettä siirtää kohtaan m , eli $b \leftarrow m$, ja siirrytään algoritmin kohtaan 1.

Tätä ideaa noudattaen, laske funktion $f(x) = e^{\sin(x^2)} e^{-x^2} \sin(x^2) - \frac{1}{2}$ välillä $[0, 1]$ sijaitseva nollakohta.

Vihje: Numeerisessa tapauksessa absoluuttisen nollan löytäminen on lähes mahdotonta – sinun tulee määrittää jokin hyväksyttävä toleranssi. Funktion arvojen samanmerkkisyyttä voidaan tutkia laskemalla näiden tulo: jos kahden luvun tulo on positiivinen, ovat ne samanmerkkisiä.

6. Sekanttimenetelmä on toinen funktion nollakohtien löytämiseen käytettävä menetelmä. Sekantti on suora joka leikkaa annettua käyrää kahdessa pisteessä. Sekanttimenetelmän idea on approksimoida annettua funktiota f välillä $[a, b]$ pisteiden $f(a)$ ja $f(b)$ välille piirretyllä suoralla. Tämän suoran, ja x-akselin välinen leikkauspiste otetaan välin uudeksi päätepisteeksi. Iteraatiokaavaksi saadaan näin

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Sekanttimenetelmä suppenee yleensä, mutta ei aina, nopeammin kuin välinpuolitusmenetelmä.

Sekanttimenetelmää käyttäen laske funktion

$$g(x) = \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2 \sqrt{x^3\pi}$$

välillä $[0, 5]$ sijaitseva nollakohta.

Vihje: Tälle funktiolle ja tälle menetelmälle on mahdollista löytää alkuarvo, jolla menetelmä ei toimi: kokeile siis useaa arvausta.

7. Matlab/Maple/Mathematica
H2T17/mlN1100/mplY100/mmaY100

Etsi yhtälön $x^8 - 36x^7 + 546x^6 - 4536x^5 + 22449x^4 - 67284x^3 + 118124x^2 - 109584x + 40320 = 0$ välillä $[5.5, 6.5]$ oleva juuri. Muuta x^7 :n kerroin luvuksi -36.001 ja katso, mikä vaikutus sillä on juureen.

Vihje: Maple: `fsolve`

Matlab: `roots` Mathematica: ...

Ratkaisu: Ratkaisutiedostossa lisää variaatioita ja analyysiä tehtävään.

Avainsanat: Polynomien juuret, numeriikka, häiriöalttius, ill-conditioned

8. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1^3 x_2 - 2 & = 0 \\ \sin(x_1) - 1 & = 0 \\ x_3^2 - 3 & = 0 \end{cases}$$

käyttäen Newtonin menetelmää. Tutki suppenemista eri alkuarvoilla.

Vihje: Tehtävässä tarvittava Jacobin matriisi kannattaa (ehkä) tehdä spesifinä funktiona.

9. Maple, Matlab, [Mathematica] (H2T8)

Newtonin menetelmän askel voidaan määritellä vähäeleisesti Maplelle. Määritellään iterointifunktio:

$$> N := x \rightarrow \text{evalf}(x - f(x)/D(f)(x));$$

Iterointi tapahtuu joko for-silmukalla tai iterointioperaattorilla `N@@k`. (For-silmukka lienee tehokkaampi, kun halutaan muodostaa koko iterointijono.) Ratkaise seuraavat yhtälöt Newtonin menetelmällä. Sopivat alkuarvot vaikkapa kuvan avulla.

a) $x \cos x = \sin x + 1, \quad 0 < x < 2\pi$

b) $x^2 + \sin x = 8$

Vihje: Matlab-tehtävässä on antoisinta tehdä Maple-Matlab-työnjako: Muodostetaan ensin iteraatiokaava Maplella symbolisessa muodossa (jätetään yllä N-kaavasta `evalf` pois) ja siirretään kaava Matlabiin (`lprint`, Matlabissa `vectorize` lisää pisteet).

Kaikkein kätevinä lienee käyttää Symbolic Toolboxia symboliseen derivointiin, jos se on käytettävissä.

Avainsanat: Epälineaarinen yhtälö, Newtonin menetelmä, iteraatio

10. Maple , Matlab (H2T9)

Tarkastellaan väestönkasvumallia

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{v}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1),$$

jossa otetaan huomioon biologisen lisääntymisen ohella myös maahanmuutto, jonka oletetaan tapahtuvan vakionopeudella v yksilöä vuodessa (netto). Oletetaan, että tietty populaatio on alunperin 10^6 yksilöä, 435000 yksilöä muuttaa "maahan" 1. vuoden aikana ja populaatiossa on 1564000 yksilöä vuoden lopulla. Määritä luku λ Käytä tätä λ :n arvoa ennustamaan populaation koko toisen vuoden lopussa, kun oletetaan maahanmuuttovauhdin säilyvän vakiona.

Vihje: Maple: `fsolve`, Matlab: `fzero`

Avainsanat: Epälineaarinen yhtälö, väestönkasvumalli, epälineaarinen yhtälö, väestönkasvumalli.

11. Newtonin menetelmä lienee kaikista funktion juuren etsimiseen käytetyistä menetelmistä kuuluisin. Toisin kuin aikaisemmin esittelemämme menetelmät, se ei edellytä tietoa juuren sijainnista, mutta toisaalta se ei aina välttämättä suppene kohti juurta.

Newtonin iteraatioilla tarkasteltavilta funktioilta odotetaan jatkuvuutta ja derivoituvuutta. Newtonin iteraatiokaava on

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Käyttäen aikaisemmin kirjoittamaasi numeerista derivointikaavaa, ja etsi funktion $f(x) = e^{\sin(x^2)} e^{-x^2} \sin(x^2) - \frac{1}{2}$ nollakohtia käyttäen Newtonin menetelmää. Käytä alkuarvoina ainakin arvoja 0.5, 12.2 ja 2.2. Kuten huomataan, alkuarvoilla on todella dramaattinen vaikutus siihen, kuinka ja minne menetelmä suppenee.

Kokeile sitten ratkaista funktion $g(x) = x^3 - 2x + 2$ nollakohta Newtonin menetelmällä käyttäen alkuarvauksena $x_0 = 1$. Mitä tapahtuu? (vinkki: `Ctrl + C` lopettaa ikuisen luupin.)

Viimeisenä kokeile ratkaista funktion $h(x) = 1 - x^2$ nollakohta Newtonin menetelmällä käyttäen alkuarvauksena $x_0 = 0$. Mitä tapahtuu?

Vihje: Numeerisissa tapauksissa etsitään nollakohtaa jollain sopivalla toleranssilla. Derivaattana kannattaa käyttää määritelmän sijasta 3-pisteen sääntöä:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

kun h on pieni.

12. Kun $z = x + iy$ ja $-2 \leq x, y \leq 2$, eksponenttifunktion $z \mapsto \exp(z)$ kuvaajan voi piirtää seuraavasti:

```
t = -2:0.2:2;
[x y] = meshgrid(t,t);
z = x+i*y;
r = exp(z)
mesh(real(r));
```

Imaginääriosan saa piirrettyä komennolla `mesh(imag(r))`. Tee vastaavat graafit seuraavista kuvauksista edellämainitulla välillä.

1. $z \mapsto \log(z)$
2. $z \mapsto z^2$
3. $z \mapsto z + 1/z$

Vihje:

13. Määritellään

$$S_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

Näytä että jokaiselle kiinnitettylle arvolle x luku $S_n(x)$ lähestyy nollaa, kun $n \rightarrow \infty$, ja etsi $S_n(x)$:n ääriarvot x :n suhteen. Piirrä funktio $S_n(x)$ välillä $[-2, 2]$ kun $n = 2, 4, 6, 8, 10$.

Vihje: Ohjelman suorituksen voi keskeyttää kesken skriptin komennolla `pause`. Välin voi määritellä joko vektorinotaatiolla `-2:0.02:2` tai komennolla `linspace(-2,2,100)`.