-e

mlGrafiikka

1. Piirrä samaan kuvaan funktioiden cos ja sin kuvaajat välillä $[-2\pi, 2\pi]$ Aloita tyyliin:

```
x=linspace(-2*pi,2*pi); y1=cos(x); y2=sin(x);
plot(...)
```

Vihje: Voit piirtää molemmat yhdellä `plot`-komennolla tai käyrän kerrallaan pitämällä vanhan kuvan `hold`-komennon avulla.

Jos haluat kuvat eri grafiikkaikkunoihin, voit käyttää `figure`-komentoa. Toisinaan on kätevää jakaa grafiikkaruutu osiin. Tämä onnistuu `subplot`:n avulla. Kokeile näitä vaihtoehtoisia tapoja (nyt tai myöhemmin).

2. Piirrä

1. xe^{-x^2} välillä $[-2, 2]$
2. $1/(1 + x^2)$ välillä $[-4, 4]$

Vihje: Muista pisteet laskutoimituksissa!

3. Piirrä $\sin(2x)$ sinisellä ja $cos(5x)$ punaisella, välillä $[-\pi, \pi]$ (samaan kuvaan). Merkitse vielä samaan kuvaan $\sin(2x)$:n arvot o-merkeillä x-pisteissä

$$-\pi, -\pi + h, \ldots - \pi + 2h, \ldots, \pi, \text{kun } h = \pi/8.$$

Vihje: Pane merkille tällaiset grafiikan ulkoasua säätelevät lisäkomennot (jotka voidaan antaa jälkikäteen (paitsi `hold on` pitää antaa ajoissa)):
`grid on/off, hold on/off, axis, xlim, ylim, figure, subplot, shg , close all` Tutki toiminta help:stä ja oppaista. Aloita: `help plot` (tai klikkaa: *plot*). Suorita joitakin kokeiluja (mutta älä uuvuksiin asti tässä vaiheessa vielä).

4. Piirrä samaan kuvaan funktioiden $\sin k\,x$ kuvaajat välillä $[0, 2\pi]$, kun $k = 1 \ldots 5$.

1. Tee nuolinäppäintä ($\uparrow$) komentoeditoinnissa hyödyntäen ja `hold on`- komentoa käyttäen.
2. Kirjoita pieni `for`-silmukka.
3. Muodosta 5-sarakkeinen matriisi, jonka $k : s$ sarake on $\sin kx$, missä x on "x-vektori" .

Vihje: Muodosta ensin 100×5-matriisi , jonka sarakkeet ovat $k\,x$, $k = 1 \ldots 5$. Kätevimmin matriisikertolaskulla `x*K`, missä x on (100-pituinen) sarakevektori ja K (5-pituinen) indeksi(rivi)vektori. Mieti huolellisesti, miksi! Toinen mahdollisuus on käyttää `meshgrid`-komentoa, jonka käyttöön rutinoidutaan 3d-grafiikan yhteydessä.

5. Matriisiin sovellettuna `plot`-funktio piirtää kunkin matriisin sarakkeen. Varsin käyttökelpoinen muoto on `plot(x,A)`, jossa `x` on `A`:n sarakkeiden pituinen argumenttivektori.

Suorita seuraavat komennot:

```
>> x=linspace(-1,1);
>> V=vander(x);
>> plot(x,V); shg
```

Jatka tähän tapaan:

```
>> figure   % Avaa uusi grafiikkaikkuna.
>> V=fliplr(V);
>> W=V(:,1:10);
>> plot(x,W);shg
```

Selitä, mitä näissä tapahtuu.

6. Piirrä samaan kuvaan potenssit $x, x^2, \ldots, x^n$, missä n on muuteltava parametri. Käytä m-tiedostoa (skriptiä) seuraavan ohjeen mukaisesti.
Avaa uusi m-tiedosto (`FILE`-valikosta `open->new->script`) ja talleta se vaikkapa nimelle potenssipiirto.m .
Tai kirjoita komentoikkunassa: `>> edit 'potenssipiirto.m'`
Aloita tiedosto jotenkin näin:

```
% % Piirret\"a\"an potenssifunktioita.
% Tiedosto: potenssipiirto.m.
% Laatinut Vilja Varis 1.1.2012  % HUOM! ellet muuta tätä, saat 0 pistettä!
close all % Grafiikkaruudun tyhjennys
n=5;      % Muuteltava parametri
...
```

Talleta ja kirjoita komentoikkunaan:

```
>> potenssipiirto
```

Tällöin tiedostossa olevat Matlab-komennot suorittuvat.

Komennot suorittuvat myös editori-ikkunasta `CTR-ENTER` :llä. (Mac:ssä yleisesti `CTR`:n sijasta `cmd`.)

(Vihreä nuoli tai `F5` toimivat myös.)
Suorita skripti muutamalla eri n:n arvolla

Vihje:

1. Tee `for`-silmukka ja käytä `hold on`-komentoa uuden kuvan piirtämiseksi vanhan kaveriksi.
2. Olkoon aluksi vaikka $n = 3, m = 7$, missä m on x-vektorin pituus. Muodosta matriisit `N` ja `X`, missä `N` koostuu vakiosarakkeista $1, 2, 3$ ja `X` saadaan latomalla kolme x-saraketta rinnakkain. Tällöin `X.^N` on matriisi, jonka sarakkeina ovat `x`-vektorin potenssit $1, 2, 3$. Kuva saadaan nyt komennolla `plot(x,X.^N)`. (Yleisesti: `plot(x,Y)` piirtää kunkin Y-matriisin sarakkeen x:n toimiessa x-akselina, kun `x` on `Y`:n sarakkeiden pituinen vektori. (Toimii myös riveittäin, jos x on rivien pituinen.)

   Miten saadaan helpoimmin matriisit `X, N` ? Standarditapa on tämä:

   ```
   >> nind=1:3;
   >> [N,X]=meshgrid(nind,x);
   ```

   Suorita ja selvitä itsellesi.

   Tee sitten esim. 100-pituinen x-vektori ja vaihtele myös n:ää ja piirrä sileitä kuvia.
   Lopuksi voit kokeilla, miltä näyttää `mesh(nind,x,X.^N)` .

   Huom! Tällainen `meshgrid`-komennon käyttö on rutiinitoimenpide 3d-grafiikan tekemisessä, sen toimintaperiaate on mukava ymmärtää, sitä tämä yrittää palvella.
3. Helpoin tapa lienee Vandermonden matriisi `vander`. Siitäpä on eri tehtävä (05), mutta ei ole huonoa harjoitella tässäkin uudestaan.

7.

[3D-grafiikkaa, korkeuskäyriä] HA

Olkoon

$$f(x, y) = \sin(3\,y - x^2 + 1) + cos(2\,y^2 - 2\,x).$$

Piirrä pintakuva ja korkeuskäyräpiirros, jälkimmäinen sekä `contour` että `ezcontour`-funktioilla. Tässä on mahdollisuus kokeilla korkeuskäyrien valitsemistapoja, myös `clabel`. Ota alueeksi vaikka `[-2 2 -1 1]` .

Vihje: Opiskele:
`http://math.tkk.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/grafiikka.html#sec:3d`
Matlab-help: `doc mesh, doc surf, doc contour`

Ratkaisu: `./mlG07ratk.m`
`./html/mlG07ratk.html`
`http://math.tkk.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/ratkaisuja/html/H3teht4.html`

8.

Olkoon

$$f(x) = \left(\frac{1 + \frac{x}{24}}{1 - \frac{x}{12} + \frac{x^2}{384}} \right)^8$$

Tämä on exp-funktion rationaaliapproksimaatio, ns. Pade-approksimaatio. Piirrä kuvaaja välillä [0,4].
Piirrä samaan kuvaan exp-funktio eri värillä ja eri kuvaan erotus $f(x) - exp(x)$ Aloita vaikka: `x=linspace(0,4,200);`

Vihje: Tehtävässä harjoitellaan lausekkeen muodostamista pisteittäisin laskutoimituksin.
Homma selkeytyy jakamalla pienempiin osiin, ainakin nyt tällaisiin:

```
>> x=...;
>> osoittaja=...;
>> nimittaja=...;
>> f=...;  % Huomaa: f on muuttuja (200-pituinen vektori), ei funktio.
>>         % Tässä ei siten saa kirjoittaa: f(x) = ...
```

Ratkaisu:

```
>> x=linspace(0,4,200);
>> osoittaja=1+x/24;    % Skalaarilla jaossa ei tarvia pistettä.
>>        % (Jos skalaari jaettaisiin vektorilla, niin toki tarvittaisiin.)
>> nimittaja=1-x/12+x.^2/384;
>> f=(osoittaja./nimittaja).^8;
>> plot(x,f)
>> hold on
>> plot(x,exp(x),'r')
>> figure   % uusi graiikkaikkuna
>> plot(x,f-exp(x))
```

Opettajalle: Tästä voisi tehdä jatkotehtävän tyyppiä: Vertaa Taylorin sarjaa ja Pade-approksimaatiota. Ja vielä: voisi vaikka opettaa, miten Pade-approksimaatioita muodostetaan.

9. Olkoot c ja z_0 kompleksilukuja. Tällöin rekursion

$$z_n = z_{n-1}^2 + c$$

määräämä dynaaminen systeemi tunnetaan kvadraattisena kuvauksena. Valituille luvuille c ja z_0 ylläoleva rekursio johtaa kompleksiseen lukujonoon $z_1, z_2, z_3 \ldots$. Tätä jonoa kutsutaan z_0:n kiertoradaksi. Riippuen lukujen c ja z_0 valinnasta ratojen muotoja on useita.

Annetulle kiinteälle luvulle c useimmilla z_0 rata lähestyy ääretöntä (eli $|z_n|$ kasvaa rajatta kun $n \to \infty$.) Joillakin c ja z_0 rata kuitenkin suppenee kohti jotain periodista silmukkaa (eli arvot kiertävät z_0 jollain tietyllä etäisyydellä $|z_n|$); joillakin alkuarvoilla rata on kaoottinen. Nämä alkuarvot z_0 ovat kuvauksen Julia-joukko.

Tässä harjoituksessa kirjoitetaan MATLAB-ohjelma, joka laskee ns. täytetyn Julia-joukon, joka koostuu niistä alkioista z_0 joiden radat jollain annetulla arvolla c eivät kasva rajatta – tavallinen Julia-joukko on tämän joukon reuna.

On näytetty, että jos $|z_n|$ kasvaa isommaksi kuin 2 jollain arvolla n, rekursio kasvaa rajatta. Arvoa n jolla tämä tapahtuu, kutsutaan tässä tehtävässä pisteen z_0 "pakonopeudeksi."

Aloita kirjoittamalla funktio `n = escapeVelocity(z0,c,N)`, jossa N on jokin yläraja pakonopeuksille (erityisesti: jos $|z_n| < 2 \; \forall \; n < N$, funktion tulee palauttaa N. Näin vältetään ikuiset silmukat).

Luodaksesi Julia-joukon kirjoita funktio `M=julia(zMax,c,N)`. Argumentti `zMax` määrää kompleksitasosta nelikulmion $|Im(z)| < z_{max}, |Re(z)| < z_{maz}$. c ja N ovat samat argumentit kuin edellä, palautettava matriisi $\mathbf{M}$ koostuu määritetyn hilan pakonopeuksista.

Aloita funktion `julia` kirjoittaminen määrittelemällä 500×500 hila realitasossa, luo sen avulla vastaava hila $\mathbf{Z}$ kompleksitasolle, ja aja funktio `escapeVelocity` jokaiselle matriisin $\mathbf{Z}$ alkiolle.

Vihje: Realiakselin väli $[a, b]$ määritellään MATLABissa komennolla `I = linspace(a,b,n)`, missä n on haluttujen pisteiden määrä, kuten esim. 500. Hila reaalitasolle määritellään komennolla `[x y] = meshgrid(t1,t2)` , missä t1 ja t2 ovat välejä reaaliakselilta. Tästä luodaan kompleksitasoa peittävä hila komennolla `z = x+i*y`.

Kompleksiluvun modulin saa selville itseisarvofunktiolla `abs`.

10. mlG11.tex
Kirjoita MATLAB-skripti, joka laskee ja piirtää seuraavat funktiot:

a) $y = 5\cos(3\pi x)$. Laske arvo 101:ssä tasavälisessä pisteessä välillä $0 \leq x \leq 1$.

b) $y = \frac{1}{1+x^2}$ välillä $-5 \leq x \leq 5$.

c) $y = \frac{\sin(7x)-\sin(5x)}{\cos(7x)+\cos(5x)}$. Laske arvo 200 tasavälisessä pisteessä välillä $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Käytä `axis` komentoa asettaaksesi näytettävät akselit väleille $-2 \leq x \leq 2$ ja $-10 \leq x \leq 10$.

Vihje: Jako- ja kertolaskujen tapauksessa ole tarkkana: haluatko matriisioperaation vai alkioittaisen operaation? Alkioittaiset operaatiot erotetaan matriisioperaatioista operaattorin eteen sijoitettavalla pisteellä. Esimerkiksi `.*` on alkioittainen kertolasku, `*` matriisien kertolasku.

Trigonometriset funktiot toimivat MATLABissa alkioittain, ja löytyvät loogisilla nimillä. (`cos, acos, sin` jne.)

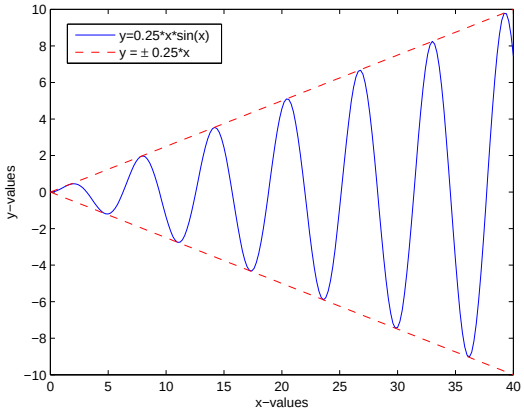
Tasavälisiä pistejoukkoja luodaan komennolla `linspace`, tai vaihtoehtoisesti MATLABin kaksoispiste-notaatiolla. Tutustu kummankin dokumentaatioon, ja päätä kumpaa kannattaa tässä tilanteessa käyttää.

Huomaa, että c)-kohdassa nimittäjällä on nollakohtia.

11. Funktion $g(x)$ kiintopiste on piste x_0, jolle pätee $g(x_0) = x_0$. Valistuneen arvauksen kiintopisteen sijainnista voi piirtämällä kuvaajat $y = g(x)$ ja $y = x$ samaan kuvaan, ja arvioimalla käyrien leikkauspistettä graafisesti. Käyttämällä tätä tekniikkaa, arvioi funktion $g(x) = \cos(x)$ kiintopisteen sijaintia.

Vihje: Kaksi käyrää voidaan piirtää samaan kuvaan joko yhdellä `plot` käskyllä : `plot(x1,y1,x2,y2)`, tai vaihtoehtoisesti voidaan käyttää MATLABin `hold` optiota:

```
plot(x1,y1);
hold on
plot(x2,y2);
hold off
```



12. Piirrä MATLABilla alla oleva kuva.

Vihje: Selityslaatikko luodaan komennolla `legend`, akselikuvaukset komennoilla `xlabel` ja `ylabel`.

13. Tässä tehtävässä tutkitaan kuvien, matriisien ja singulaariarvojen yhteyksiä.

Matriisin $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ singulaariarvohajotelma on

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T,$$

missä matriisi $\mathbf{S}$ on diagonaalimatriisi, ja matriisit $\mathbf{U}$ ja $\mathbf{V}$ ovat ortogonaalisia neliömatriiseja. Matriisin sisältämää informaatiota voidaan tietyssä mielessä kompressoida tiputtamalla osia singulaariarvohajotelmasta pois; on todistettavissa että (MATLABilla ilmaistuna) `U(:,1:k)*S(1:k,1:k)*V(:,1:k)'` on paras mahdollinen rank(k)-approksimaatio matriisille $\mathbf{A}$.

Kuva voidaan ajatella $m \times n$ matriisina, missä i, j alkio ilmaisee vastaavassa paikassa olevan pikselin väriarvon. Tutkitaan sitten kuinka singulaariarvoja voidaan käyttää hyväksi kuvien pakkaamisessa ja hahmontunnistuksessa.

Lue haluamasi kuva sisään MATLABin `imread` komennolla. Komento luo (yleensä, mutta hieman kuvasta riippuen), $m \times n \times 3$ matriisin. Tämä vastaa RGB-esitystä: ensimmäisessä kerroksessa on punaisen värin intensiteetit, toisessa vihreän ja kolmannessa sinisen. Muuta tämä matriisi harmaaskaalaan komennolla `rgb2gray`. Tämän jälkeen tee matriisille singulaariarvohajotelma komennolla `[u s v] = svd(P)`, missä `P` on kuvasi matriisiesitys. Tutki sitten millä k:n arvolla komentojono

```
>> M = u(:,1:k)*s(1:k,1:k)*v(:,1:k)';
>> image(M)
```

tuottaa havaittavia tuloksia. Pitäisi myös päteä, että kuvan isommat hahmot alkavat erottua ensin, mikä tekee singulaariarvoista huomattavan tehokkaan työkalun hahmontunnistuksessa.

Vihje: Kuvan ulottuvuuksien ei kannata olla kovin isoja: singulaariarvohajotelma on raskas laskettava. Jos haluat lisähaastetta, erottele kuvan värikerrokset, tee hajotelma niille erikseen, ja kokoa tulokset. Näin saat aikaan värikuvia.

14. Luo $n \times n$ matriiseja $\mathbf{A}$ jollakin sopivalla n (s.o. enemmän kuin kymmenen, vähemmän kuin sata), joiden alkiot ovat muotoa

$$\mathbf{A}_{i,j} = \frac{1}{i - j + t}.$$

Piirrä matriisin **A** ominaisarvot tasoon, kun t vaihtelee välillä $[-1, 1]$. Mitä havaitset? Voisivatko perättäisten ominaisarvojen *radat* esittää jotain?

Vihje: Mieti miten matriisin voisi määritellä ilman silmukkaa. Matriisin ominaisarvot lasketaan komennolla `eig` – huomaa, että jos matriisi on kovin iso, niin laskeminen voi kestää kauan.

15. HT

a) Piirrä funktiot cos t ja sin t samaan kuvaan eri väreillä.

b) Piirrä toiseen kuvaan yksikköympyrä ja säännöllinen $n-$kulmio esim. arvolla $n = 10$. Järjestä sopivilla `axis`-komennoilla skaalat yhtäsuuriksi, jotta ympyrä näkyy ympyränä.

c) Piirrä yksikköympyrän kuva joillain edellä esiintyneillä lineaarikuvauksilla(tai muilla keksimilläsi).

Vihje: Uusi grafiikkaikkuna: `figure`
Muistathan ympyrän luonnollisen parametriesityksen.
Ympyrän data koostuu oikeasti säännöllisesen n-kulmion nurkkapisteistä, missä esim. $n = 100$ (`linspace`:n oletus). Ympyrän kuvan piirtäminen on siten sama homma kuin edellisissä lineaarikuvaustehtävissä.

16. Matlab ja Maple (tee molemmilla).

$$f(x, y) = \sin(3\,y - x^2 + 1) + cos(2\,y^2 - 2\,x).$$

Piirrä pintakuva ja korkeuskäyräpiirros.

Ota alueeksi vaikka `[-2 2 -1 1]` .

Vihje: Tutustu samalla `Matlabin` `meshgrid`:n toimintaan.
Korkeusarvomatriisi Z tehdään kahden muuttujan funktiolle tähän tapaan:

```
>> x=linspace(a,b,m); y=linspace(c,d,n); % m ja n luokkaa 30.
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> Z=f(X,Y);
```

(Kokeile periaatetta pienillä, hiukan erikokoisilla matriiseilla X,Y.)
Tässä funktion f on toimittava pisteittäisin operaatioin. Jos vaikka $f(x, y) = x^2 - y^2$, kirjoitettaisiin: `Z=X.^2 - Y.^2;`

Pintoihin `mesh(x,y,Z), surf(x,y,Z), ...` Kokeile myös `colorbar` yms.

Matlabilla korkeuskäyriin `contour` , voit myös kokeilla `ezcontour`-funktiota. Mahdollisuus on kokeilla myös korkeuskäyrien valitsemistapoja, `clabel`.

Älä diskretoi liian hienoksi. Linspacessa 100 on ihan liikaa, n. luokkaa 30 olkoon lähtökohta.

Maple: Helpompaa, mutta tulos ei aivan niin loistava kuin Matlabissa. (Osin tosin varsin hienoa tämäkin, ja "context sensitive").

```
> with(plots):
> plot3d(f(x,y),x=a..b,y=c..d);
> contour(f(x,y),x=a..b,y=c..d); # Tarkista!
```