-e

mlCurveFit

1. mlCF01.tex [Maple: ../../mplteht/mplCurveFit/mplCF01.tex]

Hermiten interpolaatio: Interpolaatioehdoissa esiintyy myös derivaattoja.

Opettajalle: *Tehtävän alkuperäinen tarkoitus on demonstroida luontevaa, nautittavaa **Maple**-työskentelyä. Sopii myös oikein hyvin **Matlab**-tehtäväksi. Matlabissa on valmiina polyder-funktio, jonka ohjelmointi on sinänsä myös oikein sopiva pikku harjoitustehtävä. Tässä tehtävässä ei ole tarvetta/syytä käyttää symbolic toolboxia.*

Määritä 4. asteen polynomi p, joka toteuttaa ehdot:

$$p(0) = p'(0) = 1, p(1) = p'(1) = p''(1) = 2.$$

(a) Käsittele polynomi lausekkeena.
Tarkista tulos sopivasti `subs`-komennoilla ja piirrä kuva/kuvia polynomista ja derivaatoista.

(b) Käsittele polynomi funktiona.

Huom: 5 ehtoa ja 5 tuntematonta kerrointa $\Longrightarrow$ järkevän tuntuinen tehtävä. Yleisesti "järkevälläkään" Hermiten interpolaatiotehtävällä ei aina ole yksikäsitteistä ratkaisua (kuten ei neliömatriisin määräämällä lineaarisella yhtälöryhmälläkään – siitähän on kyse). Pelkkiä funktion arvoja koskevalla interpolaatiotehtävällä aina on (koska "Vandermonden neliömatriisi" on aina ei-singulaarinen).
Tässä opetellaan erityisesti Maplen kätevää ratkaisutekniikkaa.

Vihje: Kirjoita polynomi lausekkeeksi tyyliin:

`p:=a*x^4+b*x^3 + .... ,`
missä $a, b, \ldots, e$ ovat määrättävät kertoimet.

Derivaatta: `diff`
Arvojen (x=0,x=1) sijoittaminen p:n lausekkeeseen: `subs`
Yhtälön ratkaiseminen: `solve`

Kaikista saat tietoa näin `?diff`, ...

2. Oletetaan, että meille on annettu dataa muodossa $(x_k, y_k).k = 1 \ldots m$, johon muodustuu kaksi murtopisteen erottamaa lineaarista suuntausta. Esimerkiksi

```
x=-2:0.1:4; y=0.2*sin(3*x);
y(x<1)=y(x<1)+0.5*(x(x<1)-1);
y(x>=1)=y(x>=1)+2*(x(x>=1)-1);
```

muodostaa selvän murtopisteen kohtaan $x = 1$. Intuitiivisesti tuntuu selvältä, että tällaiseen dataan kannattaa sovittaa PNS-suoran sijaan paloittain lineaarinen funktio, ts. "suora murtopisteellä."

Kirjoita ohjelma joka tekee tämän: ohjelman tulee valita murtopiste (s, t) tasosta hiiren klikkauksen perusteella (kts. vihje) ja sovittaa paloittain lineaarisen funktion dataan tätä murtopistettä käyttäen, ts. sovittaa suoran

$$y = k_1 x + b_1, x < s$$

pisteisiin $(x_k, y_k), x_k < s$ ja suoran

$$y = k_2 x + b_2, x > s$$

pisteisiin $(x_k, y_k), x_k > s$.

Vihje: Tehtävän keskeinen osa on murtopisteen valinta ja datapisteiden suodatus.

Murtopisteen valintaan kannattaa käyttää `ginput` funktiota, joka valitsee klikatun pisteen kuvasta tyyliin

```
[x y] = ginput(1);
```

Datan suodatukseen kannattaa käyttää MATLABin loogista indeksöintiä: esimerkiksi valitaan kaikki vektorin pisteet, jotka ovat pienempiä kuin 5.

```
a = b(b<5);
```

3.

Muodosta interpolaatiopolynomi pisteistölle, joka saadaan laskemalla funktion $f(x) = \cos(1 + x^2)$ arvot tasavälisessä x-pisteistössä, jossa on 7 pistettä välillä $[0, 3]$. Piirrä samaan kuvaan funktio, datapisteet (rinkuloilla) ja interpolaatiopolynomi.

Vihje: help(doc) polyfit, polyval .

Sinun on tiedettävä, mikä on polynomin asteluku.

Tarkistus: Kulkeeko polynomi kaikkien datapisteiden kautta.

4. Kirjoita funktio, jonka otsikko ja "help-kommentit" voisivat olla:

```
function [kertoimet,condnr]=vandinterp(xdata,ydata)
% Funktio laskee interpolaatiopolynomin kertoimet Vandermonden
% systeemin ratkaisulla ja palauttaa my\"os cond-luvun.
%  Esim:
%  xdata=0:5; ydata=xdata.*sin(xdata);
%  [c,cnr]=vandinterp(xdata,ydata);
```

Laske vaikkapa kommenttiesimerkin tapaus ja vertaa polyfit-funktion antamiin kertoimiin. Piirrä data ja interpolaatiopolynomi. Käytä arvojen laskentaan polyval-funktiota.

Vihje: Olkoon $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ etsitty polynomi.
Määrätään tuntemattomat kertoimet interpolaatioehtojen $p(x_k) = y_k, k = x_0, \ldots x_n$ avulla saatavasta lineaarisesta yhtälösysteemistä ratkaisemalla.
Kirjoita yhtälöryhmä tässä yleisessä muodossa ja tee ensin Matlab-skripti tyyliin

```
xd=...;
yd=...;
A=...;  % Yht.ryhman matriisi, help/doc vander
a=      % Ratkaisuna saatava kerroinvektori, help slash (a=A\...)d
x=linspace(alkup,loppup); % x-pisteet piirt. varten
y=polyval(...);           % Polynomin arvot x-pisteissa
...
plot(xd,yd,'o')
hold on
plot(x,y)
grid on
```

Tarkistus: Kulkeeko polynomi kaikkien datapisteiden kautta.
Kun skripti toimii, tee sen pohjalta pyydetty funktio. Sovella funktiotasi johonkin tämän tehtäväkokoelman interpolaatiotehtävään.

5. Eräs kemiallinen koe tuotti seuraavat datapisteet:

```
tdata=[-1 -0.960 -0.86 -0.79 0.22 0.5 0.93];      % Aikapisteet
ydata= [ -1 -0.151 0.894 0.986 0.895 0.5 -0.306]; % Reaktiotulokset
```

Tarkoitus on estimoida reaktiotulosfunktion $y(t)$ arvoja välillä $[-1, 1]$

1. Piirrä datapisteet.
2. Muodosta interpolaatiopolynomi ja piirrä samaan kuvaan.
3. Muodosta asteita 2,3,4 olevat PNS-polynomit ja piirrä samaan kuvaan
4. Sovita vielä splini ja piirrä samaan.
5. Asettele grafiikkaikkuna paremmaksi vaikka tyyliin:

```
a=min(xdata)-0.1;b=max(xdata)+0.1;
c=min(ydata)-0.1;d=max(ydata)+0.1;
axis([a b c d])
```

Käytä myös `legend`-komentoa ja kokeile `grid on`

Vihje:

Ratkaisu:`mlCF04ratk.m` [Tulee, numero?]

6.

a) Piirrä suorat $y = 0.2 - 0.5x, y = 0.2 + 2x, y = -0.3 + 1.5x$ ja $y = 0.95x$.

b) Kirjoita suorat yhtälö$A[x; y] = b$ PNS-mielessä, ja piirrä ratkaisu samaan kuvaan suorien kanssa.

Vihje: Samaan kuvaan piirtäminen onnistuu komennolla `hold on`. PNS-ratkaisu tehdään MATLABin backslashilla.

7. mlCF07.tex/mplCF07.tex // Matlab,Maple,[Mathematica]

W.A Mozartin(1756-1791) sävellyksiä indeksoidaan Köchel-luvuilla, jotka ilmaisevat teosten sävellysjärjestyksen. Alla on eräitä Köchel-lukuja, ja vastaavien teosten sävellysvuosia.

Number	Year
1	1761
75	1771
155	1772
219	1775
271	1777
351	1780
425	1782
503	1786
575	1789
626	1791

Käyttäen tätä dataa, arvioi teoksen Sinfonia Concertanten sävellysvuosi, kun tiedetään, että sen Köchel-numero on 364.

Vihje: Piirrä ensin datapisteet tasoon, ja päätä millaista menetelmää kannattaa käyttää. Epäilemättä sopivan asteista PNS-polynomia. Suorita joitakin sovituksia, ja tarkista sitten tulos vaikka Wikipediasta.

8.

a) Luo dataa seuraavalla skriptillä:

```
r = 0.5+0.5*rand(10,1);
theta =2*pi*rand(10,1)
x = 3*r.*cos(theta);
y = 3*r.*sin(theta);
```

ja piirrä data pisteittäin.

b) Sovitamme dataan ympyrän muotoa $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2 = r^2$. Ympyrän sovituksessa etsitään kahta arvoa: ympyrän keskipistettä (c_1, c_2), ja sen sädettä r. Helpoimmin sovitus onnistuu huomaamalla, että $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2 \Leftrightarrow 2xc_1 + 2yc_2 + (r^2 - c_1^2 - c_2^2) = x^2 + y^2$. Asettamalla $c_3 = r^2 - c_1^2 - c_2^2$, saadaan yhtälö muotoa

$$2xc_1 + 2yc_2 + c_3 = x^2 + y^2.$$

Tälle yhtälölle voidaan tehdä vaadittu datan sovitus, ja ratkaista arvot (c_1, c_2, c_3), jonka jälkeen $c_3$sta ratkaistaan r.

Vihje: Pisteittäinen piirtäminen onnistuu komennolla `plot(x,y,'.')`. Ympyrän, jonka keskipiste on (x, y) ja säde r, voi piirtää komennolla `plot(x+r*cos(0:0.02:2*pi,y+r*sin(0:0.02:pi)))`.

9. Maple tai Matlab

Tutkitaan nk. Rungen ilmiötä. Laske funktion $g(x) = 1/(1 + x^2)$ arvoja tasaisin välein väliltä $[-5, 5]$, ja tee näihin pisteisiin perustuva polynominen interpolaatio. Piirrä sekä $g(x)$ että $P(x)$ samaan kuvaan. Mitä huomaat, kun valittujen datapisteiden määrää tihennetään?

Kokeile interpolointia silloin, kun datapisteitä ei valita tasavälisesti, vaan ne valitaan Chebyshev-pisteiden

$$x_j = 5\cos(\frac{j\pi}{N}), j = 0 \dots N$$

mukaan.

Vihje: Polynominen interpolaatio kannattaa tehdä MATLAB-funktiolla `polyfit`. Funktio g kannattaa määritellä funktiokahvan avulla: `g = @(x)1./(1+x.^2)`. Tasavälisiä pisteistä saa funktiolla `linspace`

Sopii aivan yhtä hyvin Maplelle.

10. H2T14.tex/mlCF13.tex/mplCF13.tex
Matlab,Maple,[Mathematica]

Yhdysvaltojen perustuslaki vaatii, että maassa suoritetaan joka kymmenes vuosi väestönlaskenta. Ohessa on väestönlaskennan tuloksia sadoissa miljoonissa asukkaissa viime vuosisadalta.

1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
76	92	106	122	132	150	179	203	226	248

Tee polynomi-interpolointi datalle, ja ennusta väestön määrä vuonna 2010. Kuinka ennusteesi suhtautuu laskennan todelliseen tulokseen: 308,745,538 laskettua asukasta?

Sovita myös eriasteisia PNS-polynomeja, vrt. Matlab Censusgui, lue Molerista: `http://www.mathworks.se`
Comp. with Matlab, interpolation

Vihje:

11. mlCF15.tex [Maple: ../../mplteht/mplCurveFit/mplCF03.tex]

Opettajalle: *(a)-kohta sopii ensitutustumiseen.*
(b)-kohta on sikäli huono, että virhetermin suuruusluokka on toisesta maailmasta (opettavaista kylläkin, mutta alkajaisiksi vaatii ainakin varoituksen).
Lisää tehtävän opetuksia ratkaisutiedostoissa.

(a) Muodosta interpolaatiopolynomi pisteistölle, joka saadaan laskemalla funktion $\cos(1 + x^2)$ arvot tasavälisessä x-pisteistössä, jossa on 7 pistettä välillä $[0, 3]$.Piirrä samaan kuvaan funktio, datapisteet ja interpolaatiopolynomi.

(b) Arvioi (Lagrangen) interpolaatiokaavan virhetermin avulla interpolaatiovirheen yläraja yo. välillä ja vertaa todelliseen.

Lause Olkoot $x_0, x_1, \dots, x_n$ erilliset pisteet ja f $(n+1)$ kertaa jatkuvasti derivoituva funktio x_k-pisteet sisältävällä välillä. Jos p_n on (1-käs) dataan $(x_k, f(x_k))$ liittyvä interpolaatiopolynomi, niin

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).$$

Vihje: Tässä on mahdollista harrastaa Maplen ja Matlabin yhteistyötä. Virhekaavan derivaatta muodostetaan tietysti Maplella ja lauseke sievennetään. Itse asiassa piirtämällä ja poimimalla kuvasta maksimipisteen koordinaatit, saadaan riittävän hyvä arvio.
Toinen mahdollisuus on käyttää Matlabin symbolic toolboxia.

Tulotermin voisi hoitaa tehokkaimmin Matlabissa ottamalla tiheän diskretoinnin ja käyttämällä max-funktiota. Maplessakin on max-funktio, lakenta on Matlabissa tehokkaampaa.
Miten tulotermi lasketaan Matlabissa? Vaikka tähän tapaan:
1. `x=linspace(....,N)`
2. Tedään matriisi X, jossa x-vektoreita allekkain n+1 kpl.
3. Tehdään matriisi X0, jossa rivit

```
x0 x0 ... x0   N kpl.
x1 x1 ... x1   N kpl.
 ...
xn xn ... xn   N kpl.
```

Nämä syntyvät vaikka `meshgrid`-komennolla tai ulkotuloilemalla ykköspystyvektorilla.
4. Vähennetään matriisit ja `prod())`. Sitten vain `abs` ja `max` kehiin.

Tosi Matlabmaista! (Ei moitita, vaikka tekisit for-loopin, vain 8 kertaa käydään, mutta hyvä ymmärtää Matlabin hienoa matriisiajattelua, muistiahan ei nykyisin tarvitse säästellä.)

Avainsanat: Interpolaatio, käyrän sovitus, interpolaatiovirhe, Lagrange

12. mlCF16.tex

Kuvitteellinen koe tuotti seuraavat tulokset. Tulosten perusteella tehtiin hypoteesi, jonka mukaan pisteet noudattelevat paloittain vakiota funktiota, jolla on yksi murtopiste, toisin sanoin, funktio, joka koostuu kahdesta vakio-osasta . Testaa hypoteesi sovittamalla paloittain vakio funktio dataan käyttämällä pienimmän neliösumman menetemää.

t	b
0.0	0.9
0.1	1.01
0.2	1.05
0.3	0.97
0.4	0.98
0.5	0.95
0.6	0.01
0.7	-0.1
0.8	0.02
0.9	-0.1
1.0	0.0

Vihje: Tehtävä kannattaa aloittaa graafisella tarkkailulla, ja määritellä silmämääräinen murtopiste. Tämän jälkeen on helppo muodostaa minimoitavat yhtälöt.

13. mlCF20.tex

Pienimmän neliösumman sovitus, PNS, LSQ

Lineaarialgebra-osioissa on aiheesta myös joitakin perustehtäviä.

Tähän tiedostoon kootaan laskaripaperiin sopivia pikaohjeita ja mielen virkistyksiä.

- .
- ..
- ...

14. mlCF21.tex (Kirjasta *Fröberg*: Numerical Analysis 1985)
Joulukuun 1–28 päivänä 1981 aurinko laski *Lund*:ssa klo 15.30:n ja 15.45:n välillä seuraavan taulukon mukaisesti, missä x tarkoittaa päivää ($1 \leq x \leq 28$) ja y minuuttimäärää klo 15.30:n jälkeen, jolloin aurinko laski.

x	y	x	y
1	8	19-21	3
2	7	22-23	4
3	6	24	5
4-5	5	25	6
6-7	4	26-27	7
8-9	3	28	7
10-18	2		

Data voidaan esittää varsin hyvin 2. asteen polynomilla. Määritä kertoimet a_0, a_1, a_2, piirrä data ja polynomi. Minä päivänä auringonlaskuaika saavuttaa miniminsä mallin mukaan.