Harj 2 teht. 13

mplV0009R.mw

23.3.2013

Alustukset

```
> restart:with(linalg): with(LinearAlgebra): with(plots):
> setoptions3d(axes=boxed,orientation=[-30,50],style=
  patchcontour):
> #read("c:\\opetus\\maple\\v201.mpl"):
  #read("/home/apiola/opetus/peruskurssi/v2-3/201/maple/v201.
  mpl");
> alias(Tr=Transpose):
```

Ohjeita:

LinearAlgebra/linalg-matriisit:

Siirtymäkauden hankaluus on tietorakennekonversiotarve.

Suosituksia:

- `H:=Matrix(hessian(f(x,y),[x,y]));  g:= Vector(grad(f(x,y),[x,y]);`
  Kannattaa näin muuttaa vanhat rakenteet uusiksi, tällöin `subs` toimii normaalisti, samoin matriisikertolasku muodossa `A.B;`
- `Transpose` ei toimi vektoreille. Ei kannata jumiutua tähän, vaan tehdä vaikka `h:=<h1,h2>; ht:=<h1 | h2>;`
  Toinen, huomionarvoinen mahdollisuus: Tehdään vektorin sijasta matriisi, lisäämällä toiset kulmasulut:
  `hm:=<<h[1],h[2]>>;`

Dokutehtava 13

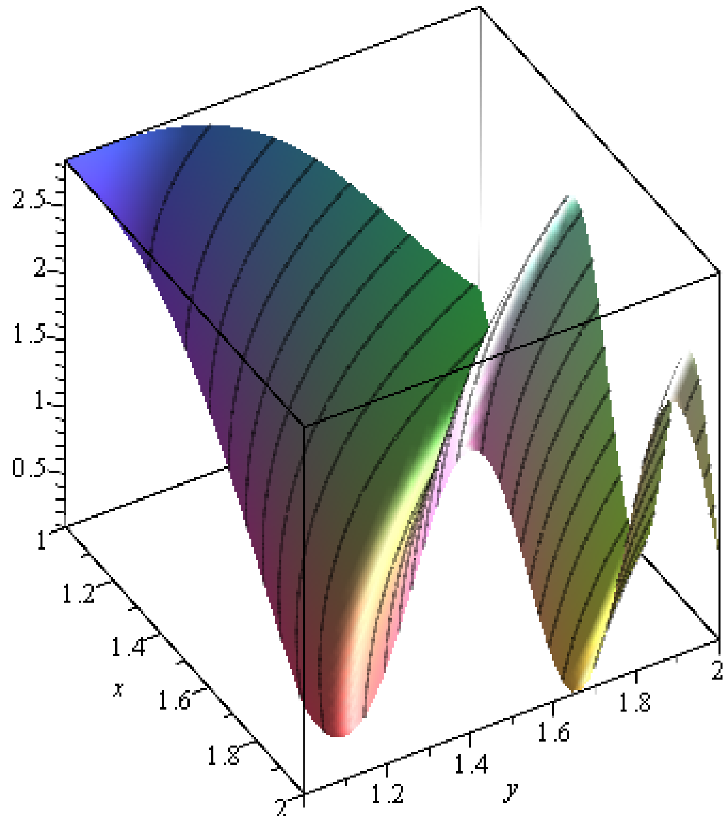
> $with(linalg) : with(plots) :$

```
> f:=(x,y)->1/x+1/y+sin(x^2*y^2);
```

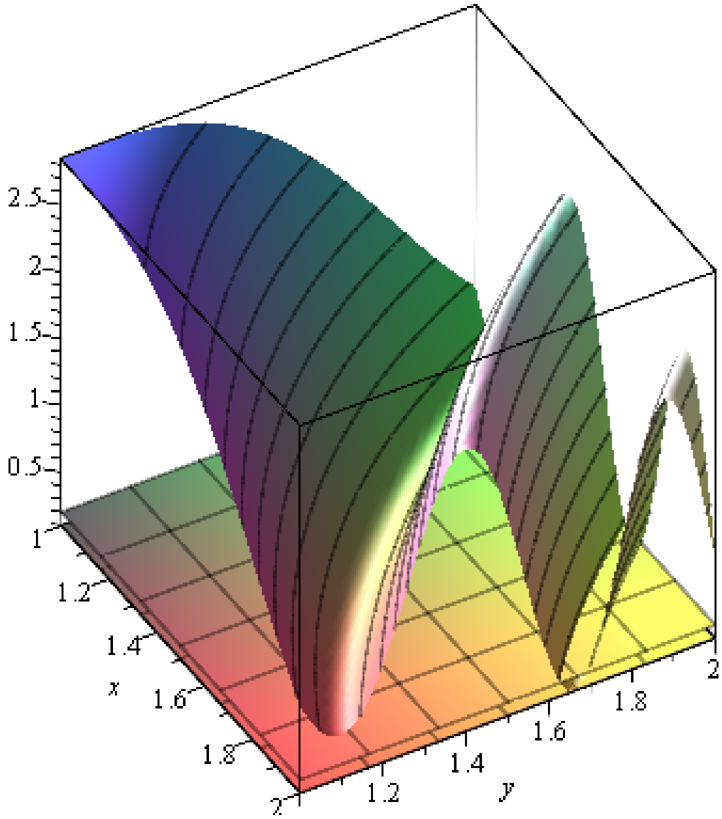
$$f := (x, y) \rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \sin(x^2 y^2) \tag{3.1}$$

> $plot3d(f(x, y), x = 1 ..2, y = 1 ..2, axes = box); pinta := \%;$

$display(\, pinta, plot3d(\, [\, 0.2, 0.1\,], x = 1 \,..2, y = 1 \,..2, style = PATCH, grid = [\, 7, 7\,]\,)\,)$

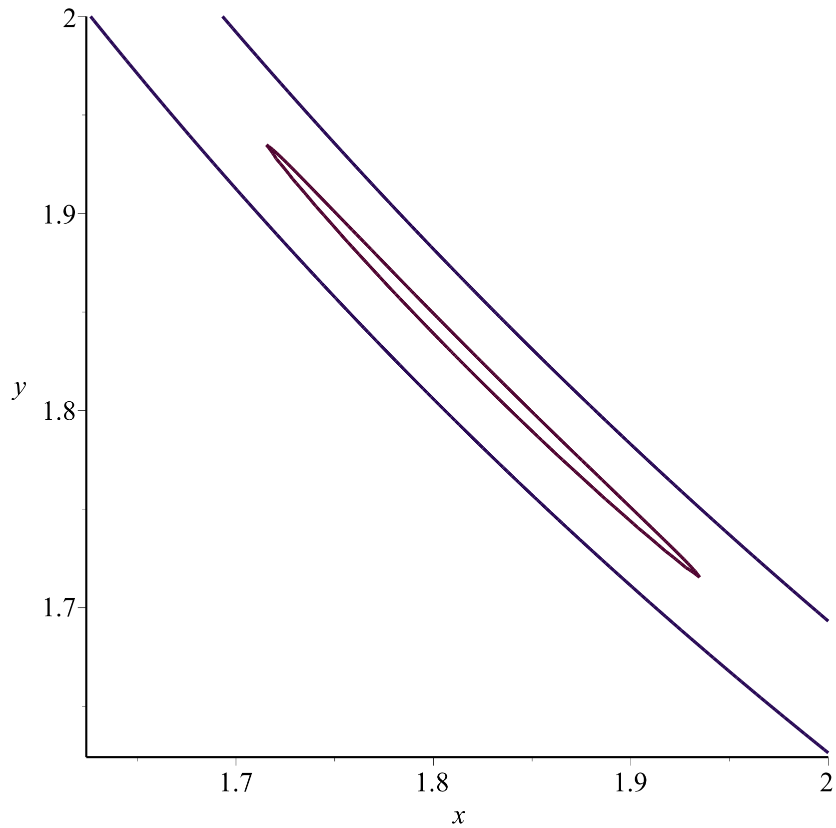


$pinta := PLOT3D(\, ...\,)$



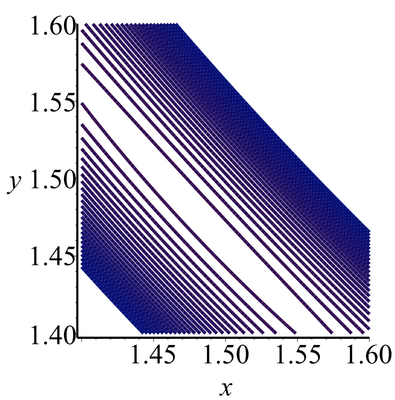
>

```
> contourplot(f(x, y), x = 1.6 .. 2, y = 1.6 .. 2, contours =
  [0.05,0.1,0.2], grid = [200, 200]);
```



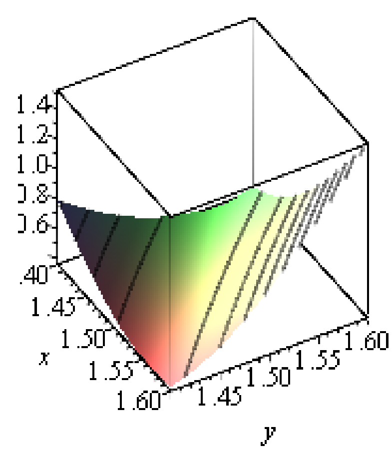
>

> contourplot(f(x, y), x = 1.4 ..1.6, y = 1.4 ..1.6, contours = [seq(0 ...6, 0.01)], grid = [100, 100]);



>

> plot3d(f(x, y), x = 1.4 ..1.6, y = 1.4 ..1.6);



>

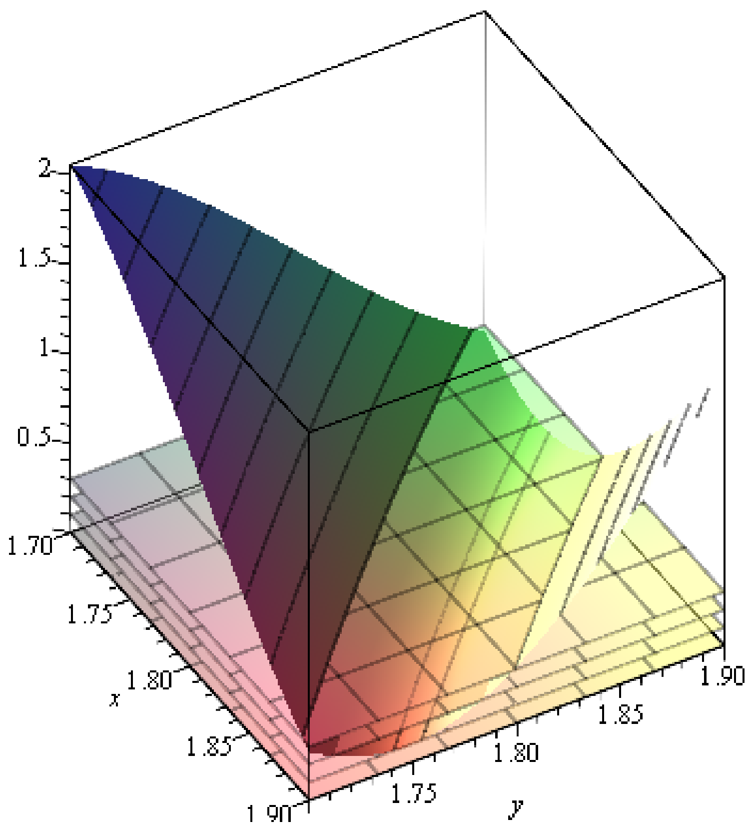
>

>

>

plot3d(f (x, y), x = 1.7 ..1.9, y = 1.7 ..1.9, axes = box) : pinta := % :
display(pinta, plot3d([0.3, 0.2, 0.1, 0], x = 1.7 ..1.9, y = 1.7 ..1.9, style = PATCH, grid = [7, 7], transparency = 0.5))
 # Yhdistetään pintapiirrokseen korkeuksilla 0.2 ja 0.1 olevat tasot.

 # "Piirre" piirton: Jos plot3d:llä piirretään 3 pintaa (tässä tasoja), niin Maple arvelee tarkoitettavan param. muotoista pintaa. Siksi tässä muutaman kummeksunnan jälkeen piirrettiin 4 tasoa.



> :

Näillä eväillä päästään jo varmuuteen siitä, että minimiarvo on lähellä *lukua* $z_{\min} = 0.1$.
Mutta missä laakean laakson pisteessä se saavutetaan, ja mikä se tarkemmin on?
Otetaan diffis avuksi.
Yllä ladattiin linalg ja LinearAlgebra.

```
> g:=Vector(grad(f(x,y),[x,y]));
```

(3.2)

$$g := \left[\ -\frac{1}{x^2} + 2\cos(x^2 y^2)\, x\, y^2 \quad -\frac{1}{y^2} + 2\cos(x^2 y^2)\, x^2\, y\ \right] \tag{3.2}$$

```
> H:=Matrix(hessian(f(x,y),[x,y]));
```

$$H := \tag{3.3}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{x^3} - 4\sin(x^2 y^2)\, x^2 y^4 + 2\cos(x^2 y^2)\, y^2 & -4\sin(x^2 y^2)\, x^3 y^3 + 4\cos(x^2 y^2)\, x\, y \\ -4\sin(x^2 y^2)\, x^3 y^3 + 4\cos(x^2 y^2)\, x\, y & \frac{2}{y^3} - 4\sin(x^2 y^2)\, x^4 y^2 + 2\cos(x^2 y^2)\, x^2 \end{bmatrix}$$

Kriittiset pisteet, eli gradientin 0-kohdat:

```
> KRPyht:=g[1]=0,g[2]=0;
```

$$KRPyht := -\frac{1}{x^2} + 2\cos(x^2 y^2)\, x\, y^2 = 0,\ -\frac{1}{y^2} + 2\cos(x^2 y^2)\, x^2\, y = 0 \tag{3.4}$$

Yhtälöt ovat mutkikkaat, mutta symmetrisen näköiset. Ei kannatta haaveillakaan, että **solve** pärjäisi näille. Ensimmäinen "insight" voidaan saada piirtämällä kummankin 0-korkeuskäyrä ja etsimällä niiden leikkauspisteitä. (Toki meillä on "insightiä" funktiopiirrostenkin perusteella, mutta aika laakealta alueelta.)

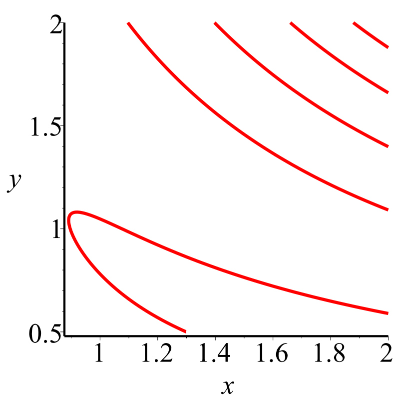
> $g1kuva := implicitplot(g[1]=0, x=0.5..2, y=0.5..2, grid=[200,200], color=red);\ g2kuva := implicitplot(g[2]=0, x=0.5..2, y=0.5..2, color=blue, grid=[60,60]);$

$$g1kuva := PLOT(...)$$

$$g2kuva := PLOT(...) \tag{3.5}$$

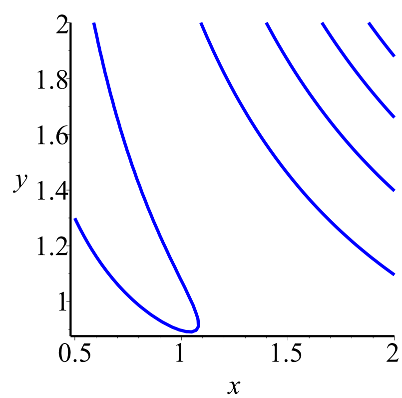
>

> $g1kuva$



>

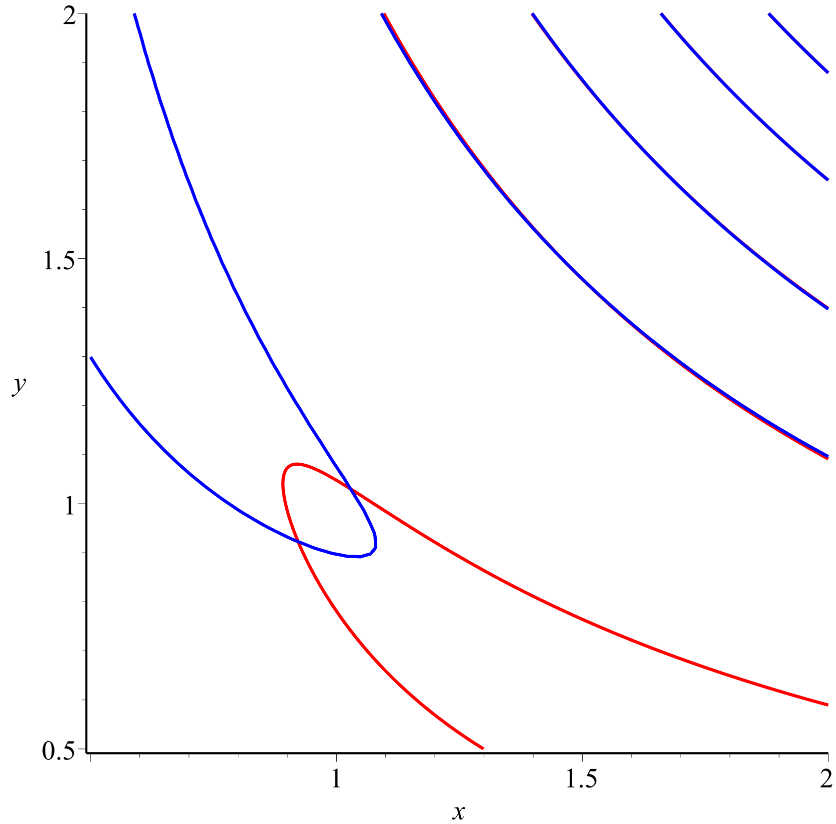
> $g2kuva$



>

Gradienttien 0-korkeusk.

> $display(g1kuva, g2kuva)$



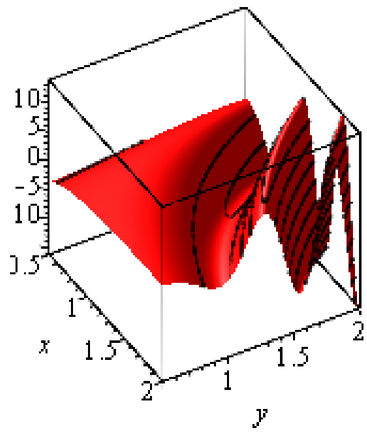
> $g1pinta := plot3d(g[1], x = 0.5 ..2, y = 0.5 ..2, grid = [200, 200], color = red)$

$$g1pinta := PLOT3D(\ldots) \tag{3.6}$$

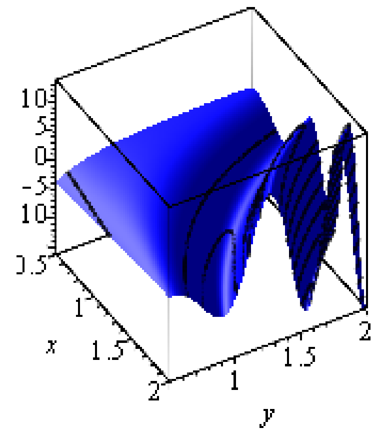
> $g2pinta := plot3d(g[2], x = 0.5 ..2, y = 0.5 ..2, grid = [200, 200], color = blue)$

$$g2pinta := PLOT3D(\ldots) \tag{3.7}$$

> $g1pinta$	> $g2pinta$

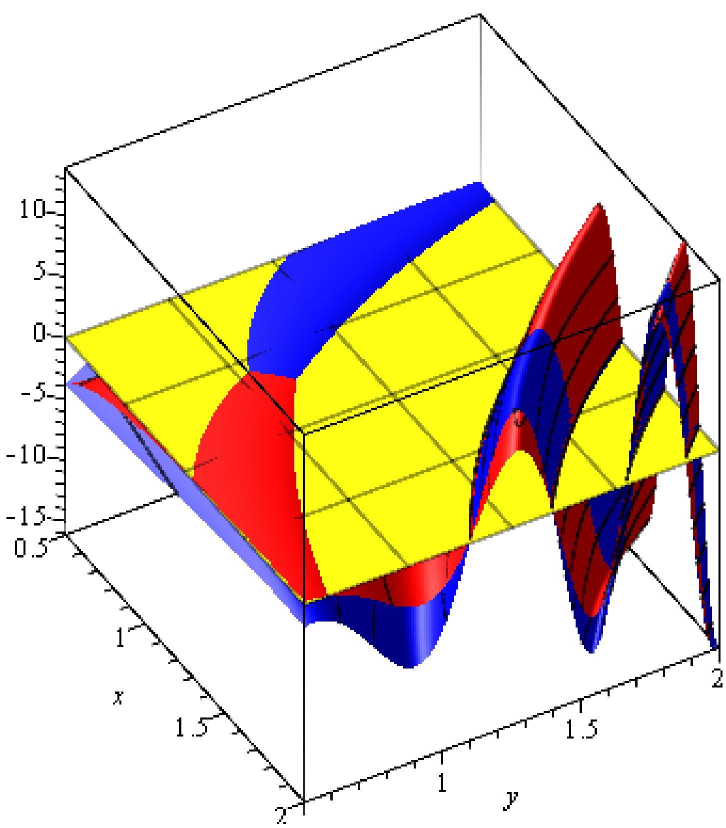


>



>

> $display(g1pinta, g2pinta, plot3d(0, x = 0.5 ..2, y = 0.5 ..2, color = yellow, grid = [5, 5], style = PATCH))$



Aika hyvä! Mutta epätietoisuus ei silti hälvene.
(Alla muutama lisäkokeilu.)

> $\#display(contourplot(g[1], x=0.5..2, y=0.5..2, grid=[200, 200], color=red, contours=[seq(-.1...1, .05)]), implicitplot(g[2]=0, x=0.5..2, y=0.5..2, color=blue, grid=[60, 60]));$

> $\#display(plot3d([0, g[1]], x=0.5..2, y=0.5..2, color=red), plot3d(g[2], x=0.5..2, y=0.5..2, color=blue), axes=box);$

>

No nyt asiaan, analyysi avuksi, muistetaan yhtältö **(3.4)** :
Kokeillaan numeerista ratkaisijaa tuolla "laakeuksilla" olevilla arvoilla:

> **(3.4)**

$$-\frac{1}{x^2}+2\cos(x^2y^2)\,x\,y^2=0,\ -\frac{1}{y^2}+2\cos(x^2y^2)\,x^2\,y=0 \qquad \textbf{(3.8)}$$

```
> KRPa:=fsolve({KRPyht},{x=1,y=1});
```

$$KRPa := \{x=1.029681991, y=1.029681991\} \qquad \textbf{(3.9)}$$

```
> KRPb:=fsolve({KRPyht},{x=0.9,y=0.9});
```

$$KRPb := \{x=0.9221899940, y=0.9221899940\} \qquad \textbf{(3.10)}$$

```
> KRPb:=fsolve({KRPyht},{x=1.5,y=1.5});
```

$$KRPb := \{x=1.478863607, y=1.478863607\} \qquad \textbf{(3.11)}$$

Näyttääpä noita löytyvän.

>

Nyt on parasta ottaa kynä ja paperi avuksi.
Käsin sievennys käy helposti ja johtaa:

```
> yhtsys:=x^3*y^2*cos(x^2*y^2)=1,x^2*y^3*cos(x^2*y^2)=1;
```

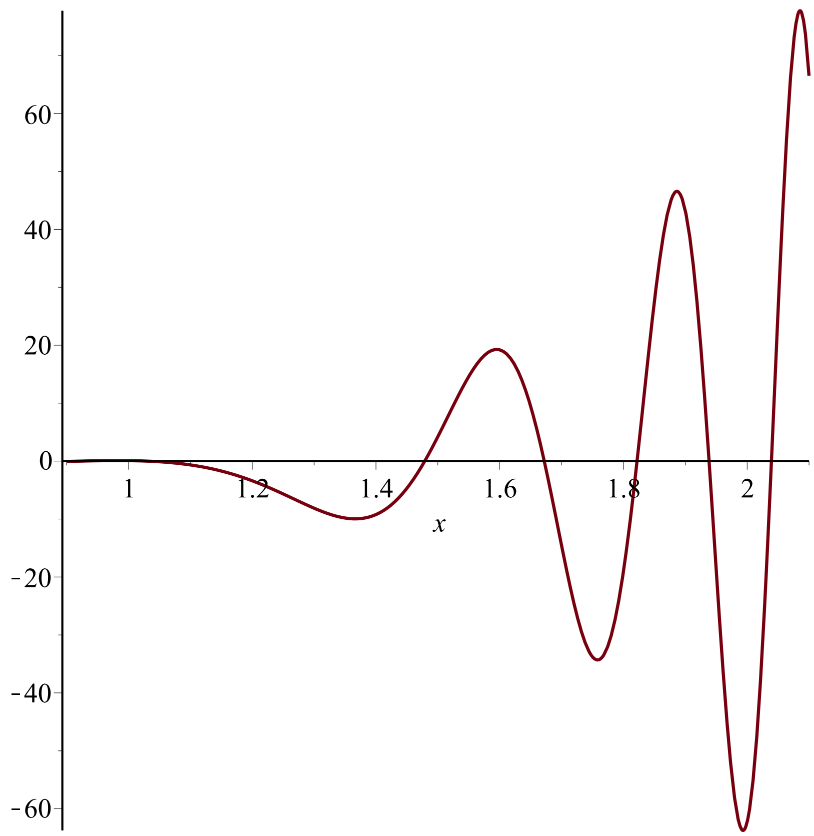
$$yhtsys := x^3\,y^2\cos(x^2\,y^2)=1,\ x^2\,y^3\cos(x^2\,y^2)=1 \qquad \textbf{(3.12)}$$

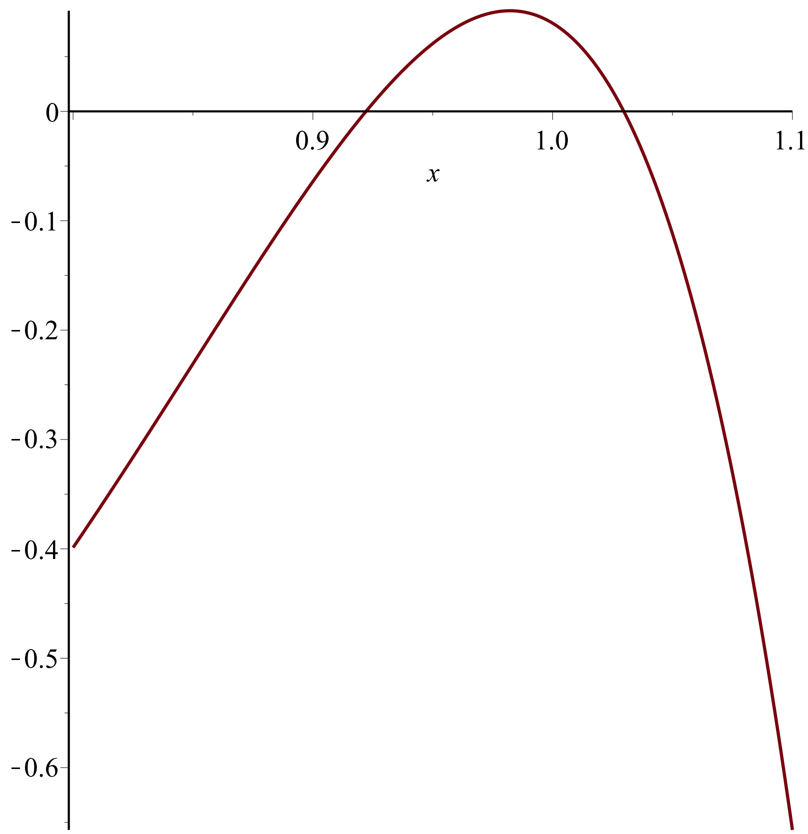
Puolittain jakamalla:

```
> x=y,2*x^5*cos(x^4)=1;
```

$$x=y,\ 2\,x^5\cos(x^4)=1 \qquad \textbf{(3.13)}$$

```
> plot(2*x^5*cos(x^4)-1,x=0.9..2.1);plot(2*x^5*cos(x^4)-1,x=0.8..1.1);
```


60
40
20
0
-20
-40
-60
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
x




```
> x1:=fsolve(2*x^5*cos(x^4)=1,x=1);
  x2:=fsolve(2*x^5*cos(x^4)=1,x=1.4);
  x3:=fsolve(2*x^5*cos(x^4)=1,x=1.7);
  x4:=fsolve(2*x^5*cos(x^4)=1,x=1.8);x5:=fsolve(2*x^5*cos(x^4)=1,
  x=1.9);
```

$$x1 := 1.029681991$$
$$x2 := 1.478863607$$
$$x3 := 1.672022523$$
$$x4 := 1.822007281$$
$$x5 := 1.938430304 \quad \textbf{(3.14)}$$

```
> KRP:=[x1,x1],[x2,x2],[x3,x3],[x4,x4],[x5,x5];
```

$$KRP := [1.029681991, 1.029681991], [1.478863607, 1.478863607], [1.672022523, 1.672022523], [1.822007281, 1.822007281], [1.938430304, 1.938430304] \quad \textbf{(3.15)}$$

Pieni niksi, jolla saadaan funktion f arvot lasketuksi yhtäaikaa kaikissa KR-pisteissä. f laskee f(x,y) :n. Haluttais, että
se laskisi f([x,y]):n. f:llä olisi siis yksi argumentti, joka on lista. No op-muodostaa operandin, tässä tapauksessa riisuu listasulut, joten näin:

> $fL := x \rightarrow f(op(x))$

$$fL := x \rightarrow f(op(x)) \quad (3.16)$$

> $fL([x, y])$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \sin(x^2 y^2) \quad (3.17)$$

Tämä fL (f Lista) voitaisiin antaa argumentiksi map:lle, mutta pidetään se vain harjoitelmana ja käytetään "anonyymia funktiota" suoraan kutsussa.
(aivan samoin kuin Matlab:ssa voidaan tehdä (@(x) lauseke(x))-tyylillä.

> $map(x \rightarrow f(op(x)), [KRP])$ # *map soveltaa funktiota kaikkiin [KRP]-listan jäseniin:*

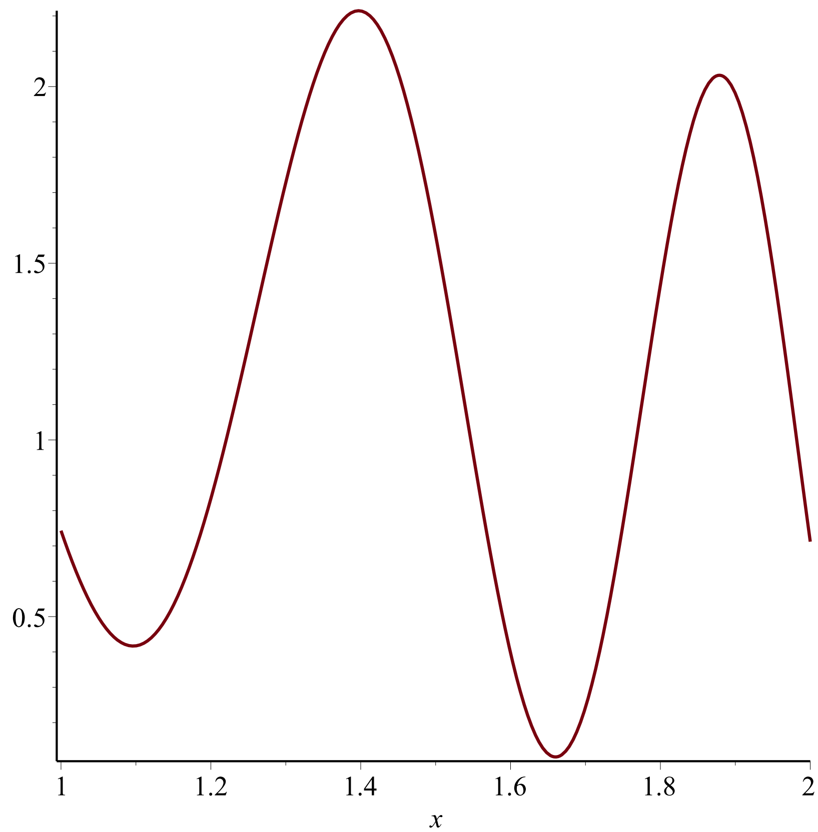
$$[2.844234845, 0.3548910986, 2.195423905, 0.0980005359, 2.031595762] \quad (3.18)$$

Piste
[x4,y4], jossa arvo 0.0980005359 on sisäpistearvoista pienin.
Reunalla ehdokkaat pienimmiksi sijaitsevat x=2 ja y=2, reunoilla, symmetrisyyden nojalla riittää tutkia toinen, olkoon y=2.

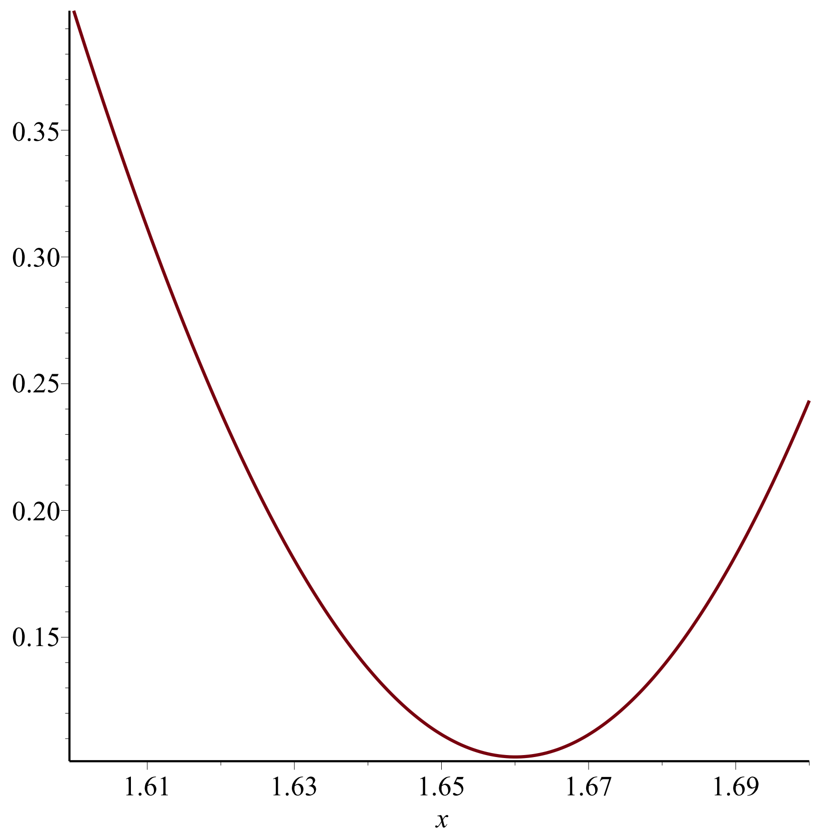
> $f(x, 2)$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \sin(4 x^2) \quad (3.19)$$

> $plot(f(x, 2), x = 1..2); plot(f(x, 2), x = 1.6..1.7)$



2
1.5
1
0.5
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
x



> $d := diff(f(x,2), x)$

$$d := -\frac{1}{x^2} + 8\cos(4x^2)\,x \tag{3.20}$$

> $xr := fsolve(d = 0, x = 1.65)$

$$xr := 1.660037833 \tag{3.21}$$

> $f(xr, 2)$

$$0.1027692994 \tag{3.22}$$

Lähelle meni, mutta sisäpiste [x4,y4] kvalifioitui voittajaksi minimikisassa.

Vastaus *piste* : [**1.822007281, 1.822007281**], *jossa arvo* **0.0980005359.**

Miten pärjäisi "pakettifunktio" Optimization-pakkauksesta?

> $with(Optimization):$

> $NLPSolve(f(x,y), x = 1..2, y = 1..2, initialpoint = [x = 1.5, y = 1.5])$

$$[0.354891098606576305, [x = 1.47886360690718, y = 1.47886360690718]] \tag{3.1.1}$$

> $NLPSolve(f(x,y), x = 1.6..2, y = 1.6..2, initialpoint = [x = 1.7, y = 1.7])$

$$[0.712096683334934699, [x = 2., y = 2.]] \tag{3.1.2}$$

> $NLPSolve(f(x,y), x=1.6..2, y=1.6..2, initialpoint=[x=1.7, y=1.8])$

$$[0.712096683334934699, [x=2., y=2.]] \quad (3.1.3)$$

> $NLPSolve(f(x,y), x=1.6..2, y=1.6..2, initialpoint=[x=1.8, y=1.8])$

$$[0.0980005361178143408, [x=1.82200728094524, y=1.82200728094524]] \quad (3.1.4)$$

Vasta, kun alkupiste annettiin 2:n numeron tarkkuudella oikein, "pakettirutiini" osui oikeaan!

Paikallisten ääriarvojen luonne (tehtävän jatkokysymyksenä (jota ei esitetty))

Katsotaan nyt vielä kunkin KRP:n oikea luonne (vaikkei kysytty):

```
> 
> #plot3d(f(x,y),x=0.5..1.5,y=0.5..1.5);
> H:=Matrix(hessian(f(x,y),[x,y]));
```

$H :=$ (3.2.1)

$$\left[\left[\frac{2}{x^3} - 4\sin(x^2y^2)\,x^2y^4 + 2\cos(x^2y^2)\,y^2, -4\sin(x^2y^2)\,x^3y^3 + 4\cos(x^2y^2)\,x\,y\right], \left[-4\sin(x^2y^2)\,x^3y^3 + 4\cos(x^2y^2)\,x\,y, \frac{2}{y^3} - 4\sin(x^2y^2)\,x^4y^2 + 2\cos(x^2y^2)\,x^2\right]\right]$$

```
> H1:=subs(x=x1,y=x1,H);H2:=subs(x=x2,y=x2,H);H3:=subs(x=x3,y=
  x3,H);H4:=subs(x=x4,y=x4,H);H5:=subs(x=x5,y=x5,H);
```

$$H1 := \begin{bmatrix} -1.551660683 & -2.467650505 \\ -2.467650505 & -1.551660683 \end{bmatrix}$$

$$H2 := \begin{bmatrix} 42.66645327 & 42.35727027 \\ 42.35727027 & 42.66645328 \end{bmatrix}$$

$$H3 := \begin{bmatrix} -86.69447129 & -86.90840220 \\ -86.90840220 & -86.69447129 \end{bmatrix}$$

$$H4 := \begin{bmatrix} 146.7897985 & 146.6244692 \\ 146.6244692 & 146.7897985 \end{bmatrix}$$

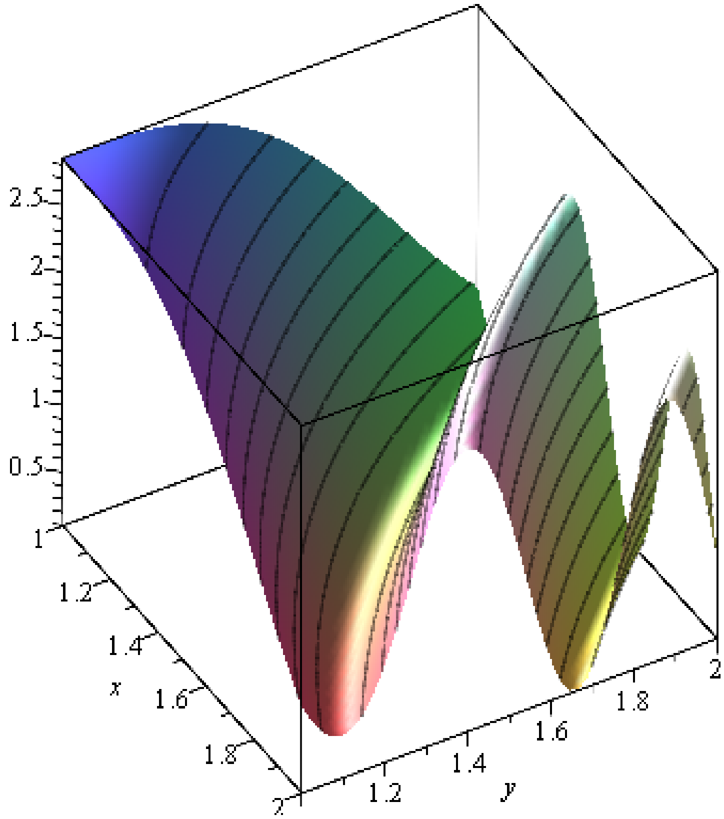
$$H5 := \begin{bmatrix} -211.7604019 & -211.8976953 \\ -211.8976953 & -211.7604019 \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

```
> det(H1),[det(H2),trace(H2)],[det(H3),trace(H3)],[det(H4),
  trace(H4)],det(H5);
```

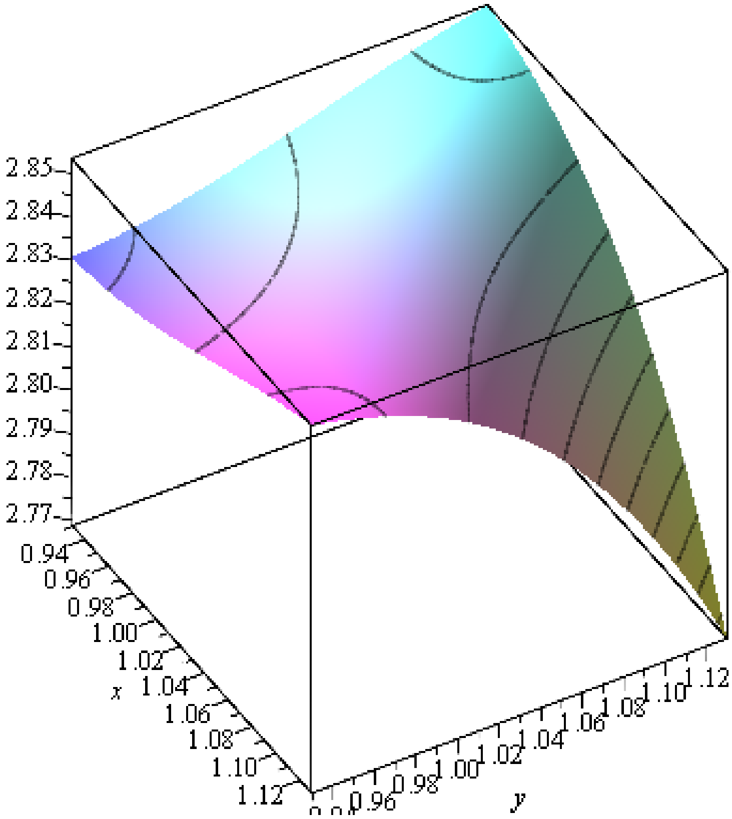
$$-3.681648140, [26.287890, 85.33290655], [-37.139021, -173.3889426], [48.50997, 293.5795970], -58.16546 \quad (3.2.3)$$

P1: satulapiste, P2: min, P3: satula, P4: min, P5: satula

```
> plot3d(f(x,y),x=1..2,y=1..2,axes=box);
```



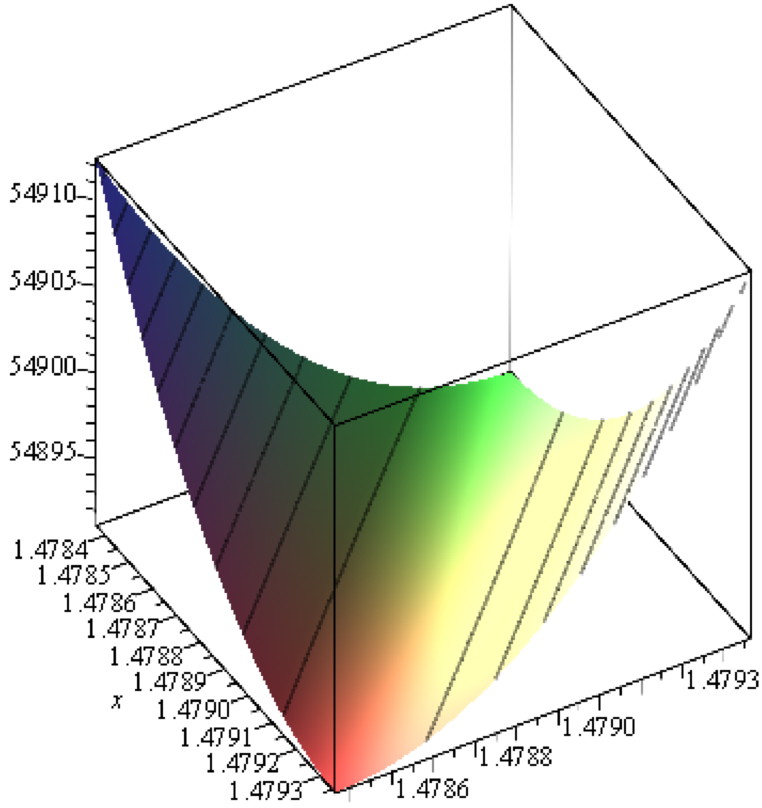

```
> x0:=x1:H:=0.1:plot3d(f(x,y),x=x0-H..x0+H,y=x0-H..x0+H,style=
  patchcontour);
```




```
>
> [x1,x1],"on satula";
```

[1.029681991, 1.029681991], "on satula" **(3.2.4)**

```
> x0:=x2:H:=0.0005:plot3d(f(x,y),x=x0-H..x0+H,y=x0-H..x0+H,
  style=patchcontour,axes=box);
```



> $f(2., 2.)$

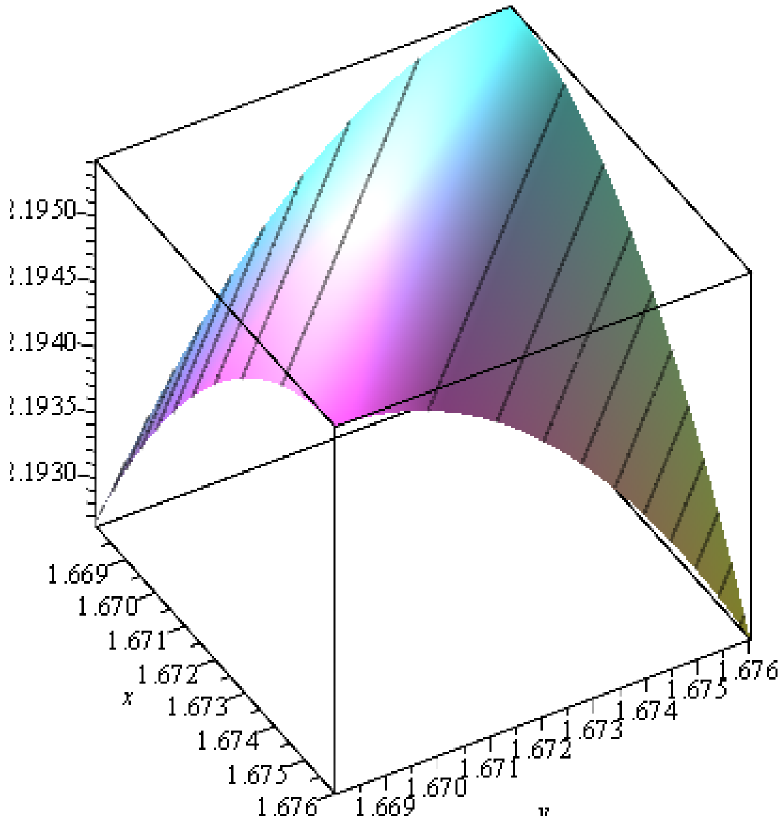
$$0.7120966833 \tag{3.2.5}$$

```
> [x2,x2]," on minimi, vaikka kuvasta ei zoomaamallakaan aivan
  varmasti näe.";
```

$[1.478863607, 1.478863607]$, **(3.2.6)**

" on minimi, vaikka kuvasta ei zoomaamallakaan aivan varmasti näe."

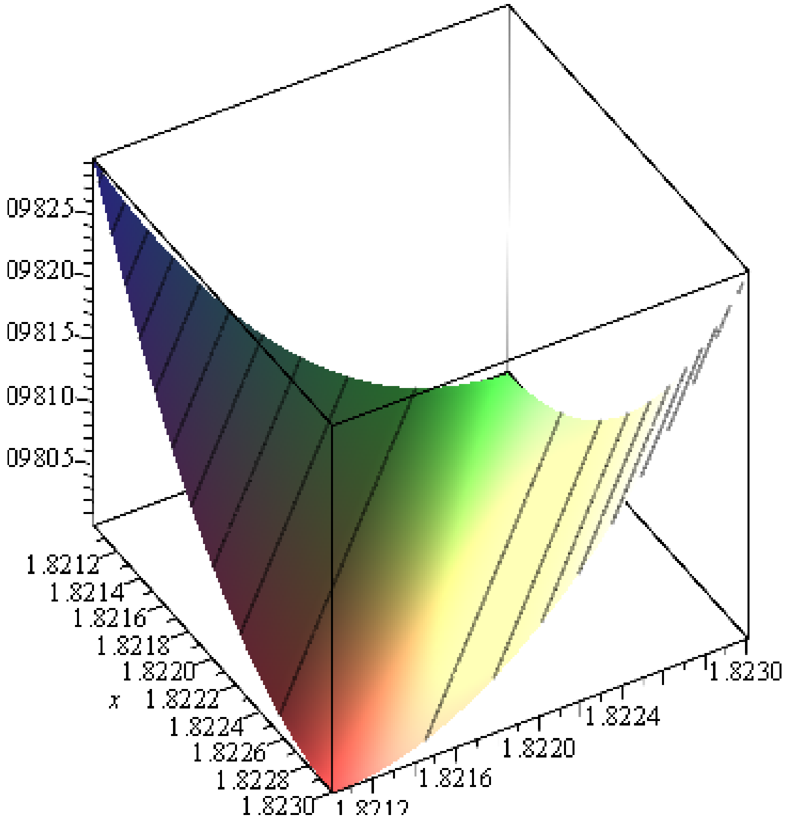
```
> x0:=x3:H:=0.004:plot3d(f(x,y),x=x0-H..x0+H,y=x0-H..x0+H);
  [x3,x3]," on satula, mutta loppuun saa zoomata, eikä aivan
  varmasti silti näe";
```



[1.672022523, 1.672022523], **(3.2.7)**

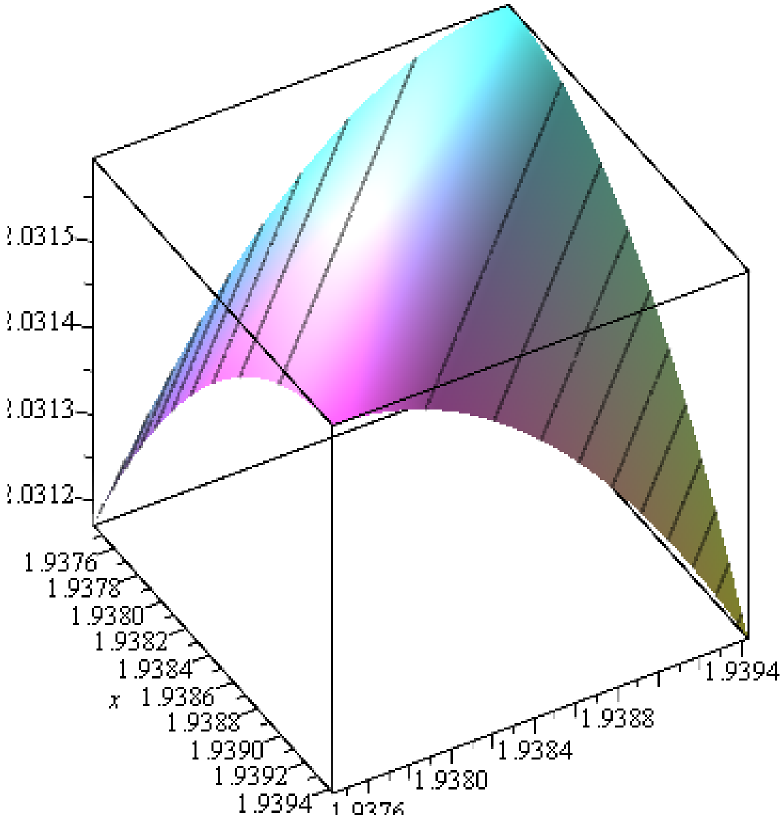
" on satula, mutta loppuun saa zoomata, eikä aivan varmasti silti näe"

```
> x0:=x4:H:=0.001:plot3d(f(x,y),x=x0-H..x0+H,y=x0-H..x0+H);
  [x4,x4]," Hesse kertoo, etta min, katsopa siita nyt!";
```



[1.822007281, 1.822007281], " Hesse kertoo, etta min, katsopa siita nyt!" **(3.2.8)**

```
> x0:=x5:H:=0.001:plot3d(f(x,y),x=x0-H..x0+H,y=x0-H..x0+H);
  [x4,x4]," Hesse kertoo, etta satula.";
```



[1.822007281, 1.822007281], " Hesse kertoo, etta satula." **(3.2.9)**

Tuokin on tosi ovelaa, että funktiolla voi olla minimilaaksojen väissä "harjanteita", jotka läheltä katsottaessa (laskettaessa) osoittautuvat "satulahuippuisiksi" .

>

> $?minimize$

> $with(Optimization):$

> $NLPSolve(f(x, y), x = 1.6..2, y = 1.6..2, initialpoint = [x = 1.7, y = 1.8])$

$$[0.712096683334934699, [x = 2., y = 2.]] \quad \textbf{(1)}$$

>